

Cercles de Tücker

par Jacques Bouteloup*

Introduction

L'énoncé E.207 du « Coin des problèmes » de *Quadrature* [1] avait pour but de montrer que les six projetés orthogonaux des sommets d'un triangle sur ses bissectrices extérieures sont cocycliques. La solution proposée [3] introduisait la notion de *cercle de Taylor* d'un triangle. Ce cercle est un cas particulier d'une famille générale de cercles attachés à un triangle, les *cercles de Tücker*¹, dont il m'a paru intéressant d'étudier quelques propriétés. Nous avons pu en donner une définition générale qui n'est plus subordonnée, ainsi que je l'explique en section II, à l'introduction et à une disposition particulière de droites antiparallèles, comme c'est le cas dans certains ouvrages classiques [4].

I Mise en évidence

Considérons (voir figure 1) un triangle quelconque ABC de cercle circonscrit (Γ) de centre O , et un point M de AB distinct de A . Menons de M la droite antiparallèle de BC par rapport à (AB, AC) . C'est la parallèle à la tangente en A à (Γ) , donc la perpendiculaire à AO . Elle coupe AC en un point N . Menons la parallèle de N à AB qui coupe BC en P . Considérons le cercle circonscrit au triangle MNP , et soient Q, R, S ses intersections résiduelles avec AB, AC, BC . Nous définissons ainsi, en faisant varier M , une famille de cercles appelés cercles de Tücker.

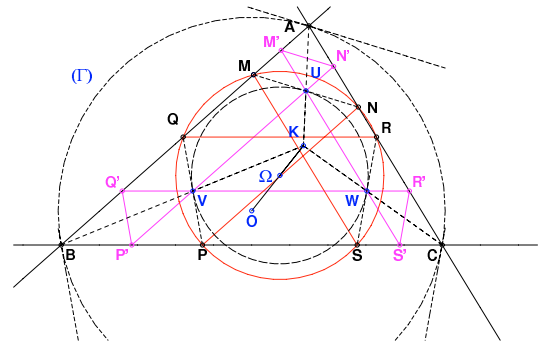


Figure 1.

Le parallélisme de NP et MQ entraîne $MN = PQ$. Par antiparallélisme, on a :

$$\begin{aligned} (PQ, BA) &= (PQ, PN) \\ &= (MQ, MN) \\ &= (AB, MN) \\ &= (BC, AC). \end{aligned}$$

Il en résulte que PQ est antiparallèle de AC par rapport à (BA, BC) , donc parallèle à la tangente en B à (Γ) . On a :

$$\begin{aligned} (MS, AC) &= (MS, MN) + (MN, AC), \\ (MS, MN) &= (PS, PN) \\ &= (PS, AB), \end{aligned}$$

et $(MN, AC) = (AB, BC)$ par antiparallélisme. Donc

$$(MS, AC) = (PS, BC) = 0,$$

d'où MS parallèle à AC .

Un raisonnement analogue montre que RS est parallèle à la tangente à (Γ) en C . Le parallélisme de MS et RN entraîne que $MN = RS$. Il en résulte que $PQ = RS$, d'où le parallélisme de QR et BC .

On en déduit que les six points jouent des rôles analogues dans la définition du cercle de Tücker (T)

* Merci à Alain Esculier, l'auteur des figures, et à L.G. Vidiani, celui de l'appendice.

¹ Ils ont en fait été introduits par Lemoine, mais le nom de ce dernier a été donné à deux éléments remarquables de la famille. Tücker est l'un de ceux qui les ont étudiés ultérieurement.

les contenant. Par l'un quelconque, on mène deux droites : la parallèle à la tangente à (Γ) en l'un des sommets du côté qui le porte, et la parallèle à l'autre côté issu de ce sommet. Par tout point d'un côté distinct des sommets passent deux cercles de Tücker obtenus en considérant les tangentes à (Γ) aux deux sommets du côté qui le porte. Par exemple, tout point de AB peut être considéré comme point M ou comme point Q de la figure 1.

II Autre définition

Les six points déterminent donc trois segments, MN, PQ, RS , parallèles aux tangentes en A, B, C à (Γ) et de longueurs égales. Cette propriété est souvent prise comme définition (par exemple dans la *Géométrie du triangle* de Lalesco [4], ou dans le dictionnaire Weisstein²). L'un d'eux, par exemple MN , étant choisi arbitrairement, on caractérise les deux autres par leurs directions, et $MN = PQ = RS$. Cela ne présente pas de difficultés si l'un des deux segments, par exemple MN , a ses extrémités intérieures aux côtés. Les parallélismes montrent alors que P et S sont intérieurs à BC , puis Q intérieur à AB et R intérieur à AC . La condition sur les longueurs suffit (voir figure 1). Mais n'oublions pas qu'il existe deux segments ayant les directions indiquées (symétriques par rapport au sommet considéré). Sur la figure 2, MN étant construit, il apparaît délicat de définir le choix précis de PQ et RS . L'étude de la section I précise aussitôt ces deux segments en menant NP parallèle à AB et MS parallèle à AC .

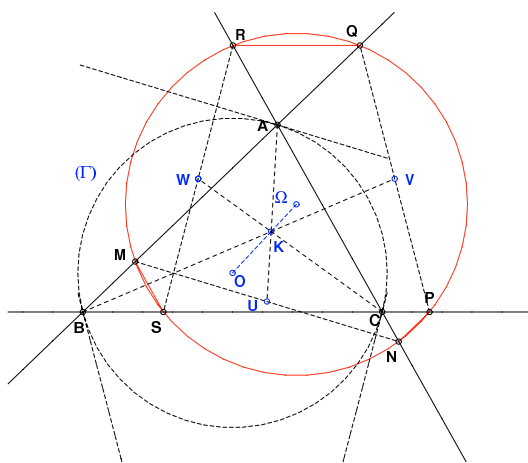


Figure 2.

III Considérations de similitudes. Centre du cercle de Tücker

Soient U, V et W les milieux de MN, PQ et RS . La droite AU est conjuguée harmonique de la tangente en A à (Γ) par rapport à AB, AC , donc polaire par rapport à (Γ) du point d'intersection de cette tangente et BC , donc passe par le pôle de BC par rapport à (Γ) . Cette propriété classique permet de démontrer qu'elle est symétrique de la médiane issue de A par rapport aux bissectrices de (AB, AC) . C'est ainsi une symédiane ; il en est de même de BV et CW . Ces trois symédianes se coupent au point de Lemoine K , isogonal de l'isobarycentre G . La droite UV , joignant les milieux des côtés non parallèles du trapèze isocèle $MNPQ$, est parallèle aux bases, donc à AB . On a donc

$$\frac{\overline{KU}}{\overline{KA}} = \frac{\overline{KV}}{\overline{KB}} = k$$

et, de même,

$$\frac{\overline{KW}}{\overline{KC}} = k.$$

Le triangle UVW se déduit ainsi de ABC par une homothétie de centre K , et de rapport k . Dans cette homothétie, O a pour image Ω , centre du cercle circonscrit à UVW , point de KO tel que $\frac{\overline{K\Omega}}{\overline{KO}} = k$. La droite $U\Omega$ est parallèle à AO , donc perpendiculaire à MN , donc médiatrice du segment MN . De même, $V\Omega$ et $W\Omega$ sont médiatrices de RS et PQ , et Ω est le centre du cercle (T) .

Un cercle de Tücker est caractérisé par son centre Ω , point de OK distinct de O , car U est déterminé comme intersection de AK et de la parallèle menée par Ω à OA . On obtient alors MN en menant de U la perpendiculaire à OA . Un cercle de Tücker est caractérisé par une homothétie de centre K , qui caractérise U, V, W images de A, B, C , donc MN, PQ, RS images des tangentes à (Γ) en A, B, C . On peut admettre le point Ω en O , le cercle considéré étant le cercle circonscrit (Γ) , qui est alors considéré comme appartenant à la famille des cercles de Tücker, les six points le caractérisant étant deux à deux confondus en A, B, C .

Les tangentes à (Γ) en A, B, C forment un triangle dit tangentiel de ABC . Les segments OA, OB, OC sont perpendiculaires aux côtés et de longueurs égales. Le point O est donc le centre du cercle inscrit, ou un centre de cercle exinscrit dans ce triangle. On démontre que c'est le premier cas lorsque ABC est acutangle, et que si l'angle en A est obtus, O est centre du cercle exinscrit dans l'angle formé par les tangentes en B et C . En utilisant l'homothétie précitée, on en déduit que, pour le triangle formé par les droites MN, PQ, RS , Ω est centre du cercle inscrit

² <http://mathworld.wolfram.com>

si ABC est acutangle, centre du cercle exinscrit dans l'angle formé par PQ , RS si l'angle en A de ABC est obtus. Dans le cas d'un angle droit en A , les tangentes en B et C à (Γ) , donc PQ et RS , sont parallèles et le triangle dégénère.

IV Autres propriétés de la figure

Il a été dit que la symédiane AUK passait par le pôle de BC par rapport à (Γ) , intersection des tangentes en B et C . Dans l'homothétie précitée, AK est invariante, donc PQ et RS se coupent sur AK , de même RS et MN sur BK , et MN et PQ sur CK . On en déduit une nouvelle construction ; MN étant fixée, on obtient ainsi un point de PQ et un point de RS .

Considérons $D = NP \cap MS$, $E = NP \cap QR$ et $F = QR \cap MS$. Les parallélismes vus en section I indiquent que DEF est directement semblable à ABC . Dans le parallélogramme $AMDN$, AS passe par le milieu de MN , c'est-à-dire U , et est donc confondue avec la symédiane AUK . Il en résulte que DEF est homothétique de ABC par rapport à K .

Il existe d'autres segments égaux sur la figure. La perpendiculaire menée de Ω à BC est médiatrice de PS et QR . La symétrie par rapport à cette médiatrice entraîne $PR = QS$. On obtient de même $MR = NS$, $MP = QN$.

On a :

$$\begin{aligned} (AB, AC) &= (MQ, MS) \\ &= (NQ, NS), \\ (AB, AC) &= (NP, NR) \\ &= (MP, MR), \\ (BC, BA) &= (PS, PN) \\ &= (QS, QN), \\ (BC, BA) &= (QR, QM) \\ &= (PR, PM). \end{aligned}$$

Ces égalités montrent que NQS et MPR sont directement semblables à ABC . Les égalités écrites plus haut montrent que ces deux triangles sont directement égaux.

Désignons par Q' , R' , S' , M' , N' , P' les points d'intersection relatifs de VW avec AB et AC , WU avec BC et BA , UV avec CA et CB . La parallèle UV à AB issue du milieu U de MN passe par le milieu N' de AN . De même, M' est milieu de AM , donc $M'N'$ parallèle à MN , perpendiculaire à OA . $N'P'$ est UV , parallèle à AB . On reconnaît là le début de la construction des points caractérisant un cercle de Tücker. Les raisonnements sont analogues pour les autres points. Ainsi, à partir de la similitude qui nous a donné U , V et W , nous obtenons un deuxième cercle de Tücker.

C'est la définition que l'on trouve dans la *Géométrie du triangle* de Sortais [5]. L'intersection U' de AU et $M'N'$ est le milieu de AU . Nous avons $\overline{KT'} = \frac{\overline{KA+KU}}{2}$. De $\frac{\overline{KT}}{\overline{KA}} = k$, nous tirons $\frac{\overline{KT'}}{\overline{KA}} = \frac{k+1}{2}$. Introduisant les points analogues V' et W' , nous obtenons un triangle $U'V'W'$ se déduisant de ABC par la similitude de centre K ayant ce rapport.

V Premier cercle de Lemoine

C'est le cercle de Tücker obtenu lorsque Ω est le milieu de OK , d'où U milieu de AK ; or c'est le milieu de AD . Donc $D = K$, et de même, $E = F = K$. Les droites NP , MS et QR passent par K . Ainsi, si l'on mène par K les parallèles aux côtés de ABC , chacune étant limitée à ses intersections avec les deux autres côtés, on obtient des segments dont les six extrémités appartiennent à un même cercle centré au milieu de OK .

VI Second cercle de Lemoine

C'est le cercle de Tücker obtenu lorsque Ω est en K . L'homothétie est alors de rapport 0 et inutilisable. Les points U , V , et W sont en K . Ainsi, si l'on mène par K les parallèles aux tangentes à (Γ) en A , B et C , chacune étant limitée à ses intersections avec les côtés issus du sommet considéré, on obtient des segments dont les six extrémités appartiennent à un même cercle centré en K .

VII Cercle de Taylor

Considérons (voir figure 3) les hauteurs AH , BI et CJ de ABC , et les projections orthogonales H' , H'' de H sur AB , AC ; I' , I'' de I sur BC , BA ; J' , J'' de J sur CA , CB .

Le quadrilatère inscriptible $AH'H''$ donne :

$$\begin{aligned} (H'H'', AB) &= (H'H'', H'A) \\ &= (HH'', HA) \\ &= (AC, BC). \end{aligned}$$

$H'H''$ est donc antiparallèle de BC par rapport à AB , AC , c'est-à-dire parallèle à la tangente en A à (Γ) . On obtient des propriétés analogues pour $I'I''$ et $J'J''$. Les quadrilatères inscriptibles $HI'H''I$ et $ABHI$ donnent :

$$\begin{aligned} (H''I', AC) &= (H''I', H''I) \\ &= (HI', HI) \\ &= (HB, HI) \\ &= (AB, AI) \\ &= (AB, AC). \end{aligned}$$

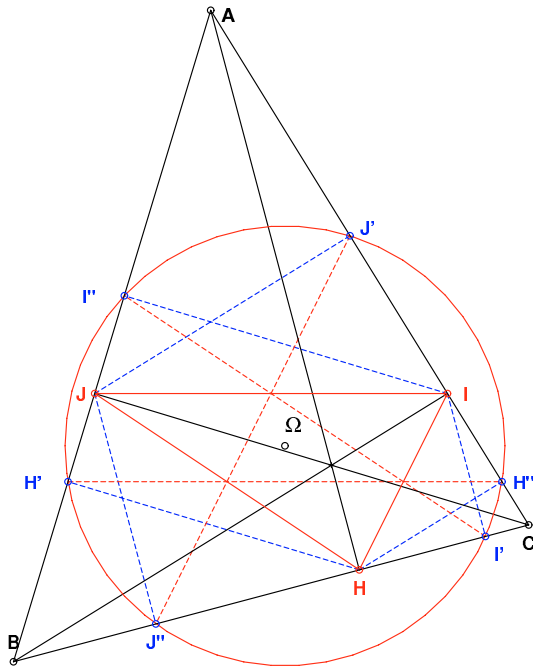


Figure 3. Cercle de Taylor.

Il en résulte que $H''I'$ est parallèle à AB . De même, $I''J'$ est parallèle à BC et $J''H'$ parallèle à CA .

On retrouve donc la configuration des six points de la section I avec les notations $M = H', N = H'', P = I', Q = I'', R = J', S = J''$.

Ces six points appartiennent à un cercle de Tucker particulier, appelé cercle de Taylor.

Soient L et T les intersections de IJ avec HH' et BC . La construction classique de la polaire du point T par rapport à (AB, AC) conduit à la division harmonique TH, BC , donc au faisceau harmonique $JT, JH; JB, JC$. Le parallélisme de JC et LH entraîne H' milieu de LH . Les droites IJ et $H'H''$, antiparallèles de BC par rapport à AB, AC , sont parallèles. Il en résulte $H'H''$ homothétique $(H, \frac{1}{2})$ de IJ . Les propriétés analogues obtenues pour $I'I''$ et $J'J''$ montrent que ces droites forment les côtés du triangle médian du triangle orthique $H'IJ$. Ce triangle médian est homothétique du triangle orthique, avec pour centre l'isobarycentre de H, I, J et le rapport $-\frac{1}{2}$. À l'angle en H du triangle orthique correspond l'angle formé par $I'I''$ et $J'J''$. Les résultats de la fin de la section III conduisent ainsi aux propriétés remarquables suivantes :

Le centre du cercle de Taylor est défini à partir du triangle médian du triangle orthique, comme centre du cercle inscrit si ABC est acutangle, comme centre du cercle exinscrit dans l'angle formé par $I'I''$ et $J'J''$ si l'angle en A de ABC est obtus. D'autre part, l'orthocentre étant centre du cercle inscrit dans $H'IJ$ si ABC est acutangle, centre du cercle exinscrit dans l'angle H si l'angle A de ABC est obtus, le centre du cercle de

Taylor est l'intersection de OK et de la droite joignant l'orthocentre de ABC au barycentre de H, I, J .

VIII Application (Énoncé E.207 de Quadrature n° 48)

Considérons le triangle $\alpha\beta\gamma$ formé par les bissectrices extérieures de ABC . Les bissectrices intérieures en sont les hauteurs, donc le centre du cercle inscrit à (ABC) est orthocentre de $\alpha\beta\gamma$. Ce point est intérieur à ABC , donc à $\alpha\beta\gamma$, et ce dernier triangle est acutangle. Les projections orthogonales de chaque sommet sur les deux bissectrices extérieures qu'il ne contient pas sont donc, pour $\alpha\beta\gamma$, les six points considérés dans la figure précédente. Ainsi, ces six points sont sur un même cercle (cercle de Taylor de $\alpha\beta\gamma$), admettant pour centre le centre du cercle inscrit dans le triangle médian du triangle ABC , homothétique $(G, -\frac{1}{2})$ du centre du cercle inscrit dans ABC .

On peut de même considérer le triangle formé par deux bissectrices intérieures et la bissectrice extérieure passant par le troisième sommet. Son triangle orthique est encore ABC , l'orthocentre étant un centre de cercle exinscrit dans ABC . On obtient ainsi trois cercles de Taylor, chacun contenant les projections orthogonales des sommets sur les côtés d'un tel triangle. Leurs centres sont les homothétiques $(G, -\frac{1}{2})$ des centres des cercles exinscrits dans (ABC) .

Appendice. Quelques remarques de L.G. Vidiani

D'après Brocard et Lemoine [2], on peut prouver que le cercle de Tucker a pour équation barycentrique :

$$\sum \frac{\beta\gamma}{c^2b^2} - \frac{AA'}{(a^2 + b^2 + c^2)AK'} \\ \sum \alpha \sum (\frac{1}{a^2} - \frac{AA'}{(a^2 + b^2 + c^2)AK'})\alpha = 0.$$

OK est le diamètre du cercle dit de Brocard. On démontre que les cercles de Tucker sont bitangents à une ellipse, dite ellipse de Brocard, tangente aux côtés de ABC aux pieds des symédianes, et admettant comme foyers les points de Brocard du triangle ABC ³. Mais ce bicontact n'a de sens que dans le plan complexifié. Le cercle de Tucker n'est pas réellement tangent à cette ellipse si son centre est extérieur au segment

³ En réalité, ces points de Brocard ont été trouvés par Crelle en 1816, et leur définition est donnée dans le paragraphe suivant.

formé par les centres de courbure aux sommets de l'axe secondaire de cette ellipse porté par OK . Enfin, cette ellipse a pour équation projective en coordonnées normales (le point unitaire est le centre du cercle inscrit)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{2yz}{bc} - \frac{2zx}{ca} - \frac{2xy}{ab}.$$

Définissons maintenant les points de Brocard évoqués dans le paragraphe précédent et considérons les trois cercles :

- passant par B et C et tangent à AC ;
- passant par C et A et tangent à BA ;
- passant par A et B et tangent à CB .

Ils contiennent tous le point Q , appelé premier point de Brocard. De même, considérons les trois cercles :

- passant par C et B et tangent à AB ;
- passant par A et C et tangent à BC ;
- passant par B et A et tangent à CA .

Ils contiennent tous le point Q' , appelé second point de Brocard. L'angle

$$\begin{aligned} w &= CBQ \\ &= BAQ \\ &= ACQ \\ &= Q'CB \\ &= Q'BA \\ &= Q'AC \end{aligned}$$

est appelé angle de Brocard. Il est intéressant de savoir que « si trois chiens partent des trois sommets du triangle et courent tous après la queue du précédent en se déplaçant à la même vitesse, alors le combat final se déroulera en l'un ou l'autre des points de Brocard, selon le sens de la poursuite. »

On peut prouver aussi que le rayon du cercle de Tücker est $R\sqrt{k^2 + (1-k)^2 \tan w}$, où w est l'angle de Brocard du triangle ABC ($\cotan w = \cotan A + \cotan B + \cotan C$).

On peut démontrer [2] (tome I, p. 155 et p. 434) que le premier cercle de Lemoine a pour équation en coordonnées barycentriques (par rapport au triangle de référence ABC) :

$$\sum \frac{\beta^2}{b^2c^2} - 2 \frac{\alpha + \beta + \gamma}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \sum \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2} \alpha = 0$$

et que le second cercle de Lemoine a pour équation en

coordonnées barycentriques (par rapport au triangle de référence ABC) :

$$\sum \frac{\beta^2}{b^2c^2} - 2 \frac{\alpha + \beta + \gamma}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \sum \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2} \alpha = 0.$$

J. Casey a étendu aux polygones harmoniques la notion des deux cercles de Lemoine.

On peut également démontrer [2] (tome I, p. 164) que le cercle de Taylor a pour équation en coordonnées barycentriques (par rapport au triangle de référence ABC) :

$$\sum \frac{\alpha\beta}{a^2b^2} - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{16R^4} \sum \alpha \cotan^2 A = 0.$$

Le lecteur curieux peut aller voir, sur le site de Weisstein précédemment cité ou dans le livre de Brocard [2], les définitions des ellipses de Brocard, Cassini, Lemoine, Mandart, Simmons, Steiner, MacBeath, celles des hyperboles ou paraboles de Kiepert ou de Yff, et enfin celles des cubiques de Darboux, Brocard, Feuerbach, MacCay, avec tous les liens que cela implique, en particulier la nomenclature des milliers de points (2 676 pour être précis) notés X_i par Weisstein, et que l'on trouvera dans un document de 712 pages dû à Clark Kimberling⁴.

Références

- [1] « Énoncé n° E.207 », *Quadrature* **48** (Avril-Juin 2003), p. 47.
- [2] H. Brocard, T. Lemoyne, *Courbes géométriques remarquables*, Albert Blanchard, 1967, t. 1, p. 164.
- [3] F. de Liget, « [Solution de l'] Énoncé n° E.207 », *Quadrature* **51** (Janvier-Mars 2004), pp. 40-41.
- [4] T. Lalesco, *Géométrie du triangle*, Vuibert, 1952, Ch. 7.
- [5] R. Sortais, Y. Sortais, *La géométrie du triangle*, Hermann, 1987.

⁴<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html> (ETC signifie « Encyclopedia of Triangle Centers »).