

Fermeture hexagonale

(Zip 2 TeX artiq.tex) version 03 05 04 17h30

Lorsque je préparais l'Agrégation au début des années 1960, trouvant que je n'avais pas assez de grain à moudre avec les problèmes que me proposais pourtant hebdomadairement le CNTE de Vanves et la préparation universitaire, je cherchais encore à m'entraîner avec des problèmes dont je cherchais l'énoncé en remontant les années dans la Revue de Mathématiques Spéciales. L'originalité du problème d'Analyse (on disait alors CDI : calcul différentiel et intégral) d'Agrégation féminine 1947 (les deux Agrégations étaient alors séparées, elles devinrent heureusement communes en 1976, en retard de 2 ans sur celle de Physique) m'avait frappé, intéressé et motivé pour le rédiger. Jugez plutôt !

Définition de fermeture hexagonale

Dans un domaine Δ du plan complexe, on donne trois familles F_i , $i = 1..3$ de courbes analytiques C_i telles que :

(a) Par tout point de Δ il passe une courbe et une seule de chaque famille.

(b) Deux courbes appartenant à deux familles différentes ont au plus un point commun dans Δ .

Les hypothèses faites sur le domaine Δ permettent de représenter chaque courbe de la famille F_1 par une équation $f_1(x, y) = a_1$, a_1 étant une constante. En effet un point (x, y) de Δ détermine d'après les hypothèses (a) et (b) une courbe et une seule de F_1 , qui peut être caractérisée par un certain paramètre a_1 fonction bijective de (x, y) dans Δ . Il en est de même pour les deux autres familles. Chaque famille F_i peut être représentée par une équation du type $f_i(x, y) = a_i$.

On effectue le changement de variables $f_1(x, y) = X$, $f_2(x, y) = Y$. Les courbes de F_1 sont alors représentées par des segments parallèles à l'axe des Y tandis que les courbes de F_2 le sont par des segments parallèles à l'axe des X .

Les hypothèses faites sur les familles dans Δ établissent une bijection entre Δ et le domaine transformé Δ' décrit par (X, Y) . On peut résoudre implicitement le système précédent en $x = u(X, Y)$, $y = v(X, Y)$ où u, v sont analytiques dans Δ' et la famille F_3 a pour équation $f_3(u(X, Y), v(X, Y)) = a_3$ et $f_3(u(X, Y), v(X, Y)) = f_3^*(X, Y)$ composée d'analytiques l'est aussi et les familles $X = a_1$, $Y = a_2$, $f_3^*(X, Y) = a_3$ vérifient aussi les hypothèses (a) et (b) dans Δ' .

Soient C_1, C_2, C_3 trois courbes arbitraires de F_1, F_2, F_3 .

Soit A un point arbitraire de la courbe C_1 .

Par A passe une courbe de la famille F_2 dont on désigne par B le point d'intersection s'il existe avec C_3 .

Par B passe une courbe de la famille F_1 dont on désigne par C le point d'intersection s'il existe avec C_2 .

Par C passe une courbe de la famille F_3 dont on désigne par D le point d'intersection s'il existe avec C_1 .

Par D passe une courbe de la famille F_2 dont on désigne par E le point d'intersection s'il existe avec C_3 .

Par E passe une courbe de la famille F_1 dont on désigne par F le point d'intersection s'il existe avec C_2 .

Nous dirons que les familles F_1, F_2, F_3 ont la propriété de "fermeture hexagonale" lorsque la courbe de F_3 qui passe par le point F passe également par le point initial A .

Une propriété immédiate est que c'est une notion **invariante par inversion** les C_i étant remplacées par leurs inverses, et Δ par le domaine image. C'est donc une propriété anallagmatique.

Les familles vérifiant la fermeture hexagonale ayant des équations ramenées à $f_i(x, y) = Cte$ (nous avons vu que c'était possible), l'équation différentielle de la famille F_i est $\frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial y} y' = 0$. L'équation différentielle des trajectoires orthogonales s'obtient en changeant y' en $-\frac{1}{y'}$ et il est immédiat que l'équation des familles G_i trajectoires orthogonales des F_i est $g_i(x, y) = f_i(-y, x) = f_i^*(x, y) = Cte$. Comme $g_1 + g_2 + g_3 = f_1^* + f_2^* + f_3^* = 0$, la propriété de fermeture hexagonale est conservée par prise de trajectoire orthogonale !

(La propriété de fermeture hexagonale, est conservée en remplaçant les familles F_i par celles de leurs trajectoires orthogonales, ou celles de leurs inverses.)

Une condition suffisante de fermeture hexagonale

Supposons qu'il existe des représentation des familles F_i telles que dans Δ

$$\mathbf{f_1(x, y) + f_2(x, y) + f_3(x, y) \equiv 0}$$

(1) alors les trois familles vérifient dans Δ la propriété de fermeture hexagonale.

En effet le changement de variables qui précède la définition de fermeture hexagonale, transforme les trois familles en les trois familles $X = a_1, Y = a_2$ et comme $f_3^*(X, Y) = f_3(x, y) \equiv -f_1(x, y) - f_2(x, y) = -X - Y$ la troisième famille devient $X + Y = -a_3$.

Dans le domaine Δ' on a donc une famille de segments parallèles à OY , un autre de segments parallèles à OX et une troisième de segments parallèles à la seconde bissectrice $X + Y = 0$.

C_1 étant en prenant $C_1 \cap C_2$ comme origine 0, d'équation $X = 0$, C_2 d'équation $Y = 0$ et en appelant $U = (u, 0) = C_2 \cap C_3$ et $V = (0, v) = C_1 \cap C_3$, C_3 a pour équation $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1$.

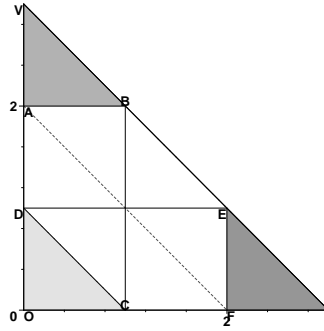
Analytiquement $A = (0, a)$, donc $y_B = a$ et $\frac{x_B}{u} + \frac{y_B}{v} = 1$ donc $x_B = u - u\frac{a}{v}$.

Puis $C = (u - \frac{a}{v}, 0)$ et comme CD est parallèle à C_3 , $\frac{x_D}{u} + \frac{y_D}{v} = \frac{x_C}{u} + \frac{y_C}{v} = 1 - \frac{a}{v}$. Donc $D = (0, v - a)$, puis $y_E = y_D = v - a$ et puisque E est sur C_3 , $\frac{x_E}{u} + \frac{y_E}{v} = 1$ soit $x_E = u(1 - 1 + \frac{a}{v}) = u\frac{a}{v}$ et $E = (u\frac{a}{v}, v - a)$.

Par suite $F = (x_E, 0) = (u\frac{a}{v}, 0)$ et comme la droite menée par F doit être parallèle à C_3 , l'équation de cette droite est $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = \frac{x_F}{u} + \frac{y_F}{v} = \frac{a}{v}$, par conséquent cette droite rencontre $OY = C_1$ en $(0, a) = A$, il y a bien fermeture hexagonale.

On peut aussi justifier la fermeture hexagonale en faisant la figure associée et en utilisant que les trois triangles directement semblables car à cotés mutuels parallèles DOC , EFU , VAB , sont en fait égaux car $AB = OC$, $OD = FE$, donc $AV = FE$ et AF est parallèle à VU .

Fermeture Hexagonale Agreg CDI femmes 1947

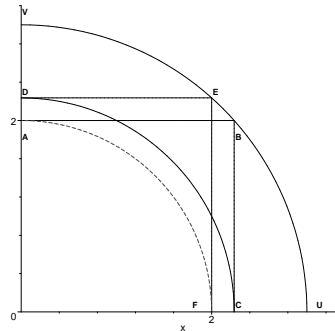


Des exemples

Nous les numérotons Ei. (Les noms des fichiers des programmes Maple d'illustration sont donnés en annexe).

(E1) **Exemple des axes et des solutions d'une équation à variables séparables** Nous supposons que la famille F_1 est constituée par des parallèles à Oy , F_2 des parallèles à Ox et que la famille F_3 est constituée par les courbes intégrales de l'équation différentielle à variable séparées $A(x)dx + B(y)dy = 0$, où A, B supposées uniformes ont le même signe sur Δ . Donc $X = \int_{x_0}^x A(t)dt$ et $Y = \int_{y_0}^y B(t)dt$, sont des fonctions uniformes de x et y respectivement et monotones et le théorème d'inversion d'une fonction continue strictement monotone, permet de prendre X et Y comme nouvelles variables. C_3 a comme équation $-X - Y = a_3$ et la condition suffisante de fermeture hexagonale est bien satisfaite car F_1 ayant comme équation $X = a_1$ et F_2 $Y = a_2$ on a bien $X + Y - (X + Y) = 0$.

Fermeture hexagonale - ex 1 - variables séparable



(On peut donner des exemples : Si $A(x) = 2(x - a)$ et $B(y) = 2(y - b)$, la famille F_3 est constituée des

cercles de rayon constant et de centre fixe, homothétiques de celui de rayon 1 dans une homothétie de centre (a, b) : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = Cte$; si $A(x) = 2x$ et $B(y) = -1$ on trouve les paraboles d'axe Oy et translattées de l'une d'entre elle dans une translation parallèle à cet axe : $y = x^2 + Cte$; Si A et B sont constantes par exemple $A = 1$, $B = 1$ qui correspond au cas rectiligne de la condition suffisante, les trois familles F_i sont constituées de droites)

(E2) Faisceaux de cercles à points de base associés à un triangle

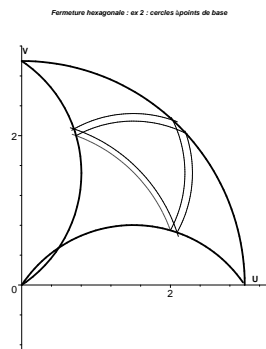
P, Q, R étant trois points non alignés, on prend comme domaine Δ l'intérieur du cercle circonscrit au triangle PQR et pour F_1, F_2, F_3 les faisceaux de cercles ayant pour points de base respectifs P et Q , Q et R , R et P .

Les propriétés des faisceaux de cercles assurent que par tout point de Δ passe un cercle de chaque famille et un seul. Et deux cercles de deux faisceaux différents ne se rencontrent dans Δ qu'en un point au plus (puisque l'un des autres est P, Q ou R).

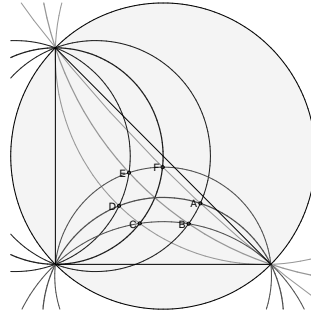
Première démonstration : M étant un point de Δ , l'angle (MP, MQ) est constant sur un cercle de la famille F_1 , il est une fonction de (x, y) , puisque $\tan(MP, MQ) = \frac{\frac{y-y_Q}{x-x_Q} - \frac{y-y_P}{x-x_P}}{1 + \frac{y-y_Q}{x-x_Q} \frac{y-y_P}{x-x_P}}$. Les cercles de la famille F_1 sont caractérisés par $(MP, MQ) = Cte$, il en est de même par permutation circulaire sur les points P, Q, R pour les deux autres familles. On constate que la partie "utile" de Δ se limite à l'intérieur du triangle PQR , car pour les autres points, il n'existe qu'une seule famille dont une courbe passe par ce point.

À l'intérieur du triangle, $(MP, MQ) + (MQ, MR) + (MR, MP) = \pi$, en caractérisant les familles respectivement par $(MP, MQ) - \frac{\pi}{3} = Cte$, $(MQ, MR) - \frac{\pi}{3} = Cte$, $(MR, MP) - \frac{\pi}{3} = Cte$, on a bien le critère suffisant de fermeture hexagonale.

Seconde solution : Effectuant une inversion de pôle Q (rappelons que nous avons déjà dit qu'une inversion conserve la propriété de fermeture hexagonale dans le domaine Δ' image de Δ), on transforme les deux familles de cercles passant par Q en deux familles de droites. On peut alors mettre en évidence la condition suffisante de fermeture hexagonale (voir [8]).



Et voici une meilleure figure obtenue avec un programme plus élaboré écrit par Alain Esculier



(On peut poser la question de la possibilité de calcul théorique des angles des extrémités des arcs considérés, dans le domaine Δ ; de plus lorsque les trois cercles C_1, C_2, C_3 appartiennent à un même réseau (c'est à dire ont un point commun) l'animation montre que A, B, C, D, E, F convergent vers ce point commun : il serait intéressant de le justifier).

(E3) Faisceaux de cercles à points de Poncelet associés à un triangle

P, Q, R étant trois points non alignés, on prend comme domaine Δ l'intérieur du cercle circonscrit au triangle PQR et pour F_1, F_2, F_3 les faisceaux de cercles ayant pour points de Poncelet respectifs P et Q , Q et R , R et P .

Pour la vérification des hypothèses on procède comme dans (E2).

Première solution : $P = 0, Q = 0, R = 0$ étant les équations des cercles points P, Q, R respectivement. Les courbes de la famille F_1 ont comme équation $\frac{P}{Q} = Cte$, celles de la famille F_2 ont comme équation $\frac{Q}{R} = Cte$, et enfin celles de la famille F_3 ont comme équation $\frac{R}{P} = Cte$, et puisqu'on constate que $\frac{P}{Q} \cdot \frac{Q}{R} \cdot \frac{R}{P} = 1$, on en déduit que $\ln \left| \frac{P}{Q} \right| + \ln \left| \frac{Q}{R} \right| + \ln \left| \frac{R}{P} \right| = 0$ et la condition suffisante de fermeture est satisfaite avec $f_1(x, y) = \ln \left| \frac{P}{Q} \right|$, $f_2(x, y) = \ln \left| \frac{Q}{R} \right|$, $f_3(x, y) = \ln \left| \frac{R}{P} \right|$.

Seconde solution : Effectuant la même inversion de pôle Q que dans (E2), on peut alors mettre en évidence la condition suffisante de fermeture hexagonale (voir [8]).

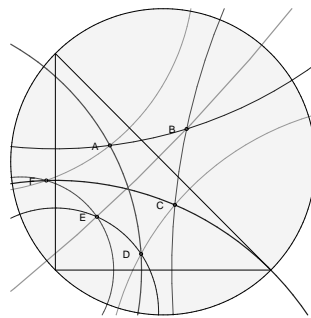


Figure due au beau programme d'Alain Esculier.

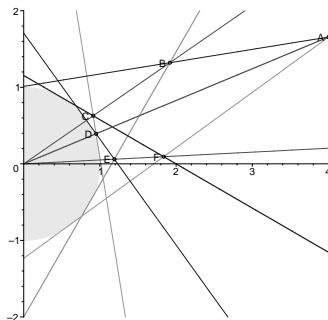
(E4) trois familles de droites Le plan étant rapporté à deux axes rectangulaires Ox, Oy , on désigne par γ le cercle de centre O et de rayon ρ et on prend comme domaine Δ le demi-plan $x > \rho$. F_1 est la famille des droites passant par O , F_2 est la famille des droites tangentes à γ en un point d'ordonnée positive, F_3 est la famille des droites tangentes à γ en un point d'ordonnée négative.

On vérifie facilement les hypothèses initiales pour Δ . Les courbes C_1 ont comme équation $-\frac{y}{x} = a_1$; Les tangentes à γ ont comme équation $x \cos \varphi + y \sin \varphi - \rho = 0$, et posant $\tan \frac{\varphi}{2} = t$ avec $-\pi < \varphi < \pi$, l'équation de ces tangentes prend la forme $x(1 - t^2) + y2t - \rho(1 + t^2) = 0$, ou $t^2(x + \rho) - 2ty + \rho - x = 0$ et donc $t = \frac{y \pm \sqrt{x^2 + y^2 - \rho^2}}{x + \rho}$.

On constate que t a le signe de φ et en mettant les équations des courbes des diverses familles sous la forme

$t_2 = \frac{xy + x\sqrt{x^2 + y^2 - \rho^2}}{x(x + \rho)} = a_2$, $\rho t_3 = \rho \left(\frac{xy - x\sqrt{x^2 + y^2 - \rho^2}}{x(x + \rho)} \right) = a_2$ et enfin $a_1 = -\frac{y}{x} = -\frac{y(x + \rho)}{x(x + \rho)}$ on constate qu'on a bien le critère suffisant de fermeture hexagonale puisque $t_2 + t_3 - \frac{y}{x} = 0$.

(On peut chercher à démontrer qu'il est impossible de choisir un sous domaine Δ' de Δ , symétrique, ou même limité par un triangle équilatéral)



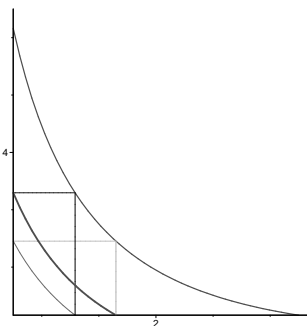
Cette figure est due encore au beau programme d'Alain Esculier.

(E5) Un exemple avec deux familles de droites

On se donne l'exemple F_1 , $x = Cte$, F_2 , $y = Cte$ et enfin F_3 , $\frac{e^x \ln y}{e^x + \ln y} = Cte$. Le domaine Δ étant le demi-plan $y > 0$, les hypothèses initiales se vérifient rapidement.

Transformant les équations précédentes en $-e^{-x} = a_1$, $-\frac{1}{\ln y} = a_2$ et $e^{-x} + \frac{1}{\ln y} = a_3$ on a bien la condition suffisante de fermeture hexagonale.

image 8 de l'animation de l'exemple E5



Certains paramètres permettent de tracer une solution sous Maple 8 et non sous Maple 5. De plus, si l'on fait tracer la courbe $y = \exp(-u * \exp(x) / (-\exp(x) + u))$, on voit que pour $u = 1$ par exemple la courbe n'a pas de points pour $0 < x < 1$ ou $\{x > 0, y < 2\}$ par conséquent si l'on prend des droites $x=x_0$, $y=y_0$ et un point de départ non convenables on n'obtiendra pas de solution.

Ces 5 exemples montrent la variété des possibilités de fermeture hexagonale !

Remarque : La seconde partie du problème d'Agrégation 1947, beaucoup plus technique, à base de jacobiens, donnait une condition nécessaire et suffisante pour que les trois familles soient transformables simultanément en trois familles de droites parallèles, et donc vérifient la propriété de fermeture hexagonale.

Posant (pour φ analytique dans Δ) $T_i(\varphi) = \lambda_i \frac{D(\varphi, f_i)}{D(x, y)} = \lambda_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$ (suivant la notation classique du déterminant jacobien de f_i et φ par rapport aux variables x, y), λ_i désignant une fonction de x, y , cette condition nécessaire et suffisante se résume en la possibilité du choix des variables et des "multiplicateurs" λ_i tels que l'on ait à la fois $\boxed{\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3 = \mathbf{0}}$ et le crochet de Lie $\boxed{[\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2] = \mathbf{T}_1 \circ \mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_2 \circ \mathbf{T}_1 = \mathbf{0}}$.

Conclusion

Le lecteur trouvera de nombreux autres thèmes de fermeture, comme le théorème de retour de Poincaré [4,5], le théorème de Li et Yorke [4,5], l'utilisation des crochets de Lie en géométrie pour les conditions d'alignement [1,6], les tissus hexagonaux en lien avec les configurations de Reye [2,3] et les fermetures topologiques : en partant d'un ensemble quelconque, les prises aléatoires répétées d'adhérence et d'intérieur ne donnent qu'au maximum 7 ensembles possibles.

Glossaire

- **Analytique** : La notion usuelle de fonction analytique dans un domaine plan complexe, c'est à dire développable en série entière au voisinage de tout point de ce domaine, se généralise pour les fonctions de plusieurs variables, avec des développements séries entières de deux variables $\sum a_{i,j} u^i v^j$.

Illustration en Maple des exemples et de la condition suffisante

(Pour éviter les recopier, les fichiers associés comprenant les procédures Maple (V5) peuvent être envoyés à tout lecteur en faisant la demande par mail)

Ces programmes permettent en outre une animation de tous les cas (c'est à dire l'évolution du graphe de la fermeture, lorsque le point A se déplace sur la courbe C_1).

Les programmes faits par Alain Esculier (*ferme.mws*, *fermeture_hexagonale.mws*) (que je remercie encore une fois) sont beaucoup plus efficaces et structurés que les miens (*ferm.mws*) plus rustiques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Achache : Mathématiques du CAPES, Hermann 1976, p 96-98.
 - [2] M. Berger : géométrie tome 1 : action de groupes, Cédic 1977, p 150.
 - [3] M. Berger : problèmes de géométrie commentés et rédigés, Cédic 1982, p 38, 165-167
 - [4] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, V. Maillot Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1, Masson 1994, p 129-131 et 180-181.
 - [5] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 3, Masson 1994, p 116-118 et 89-93.
 - [6] R. Gouffier : cours, exercices d'application; géométrie et cinématique, Bréal 1974 p 39.
 - [7] Petit Archimède numéro 99-100 p 23-24.
 - [8] Revue de Mathématiques Spéciales : problème d'agrégation mathématique féminine CDI 1947 septembre 1947 p 11 et 12, corrigé Mars 1948 p 176-183.
-