# Carl Friedrich Gauss
# Le Prince des Mathématiciens

Farouk Boucekkine

http://dma.ens.fr/culturemath


Ce texte est une introduction à la vie de Gauss, l'un des plus grands mathématiciens et scientifiques de tous les temps. Un homme qui a vécu toute sa vie dans le but exclusif de ressembler à ses idoles, Newton et Archimède, et de demeurer à jamais une étoile dans le ciel de la science humaine.

Outre les mathématiques, il s'est illustré dans de nombreux domaines, en particulier l'astronomie (il exerça le métier d'astronome pendant la plus grande partie de sa vie) et la physique (il construisit avec son ami Weber le premier télégraphe). Afin de garder des proportions raisonnables, ce texte prend toutefois le parti de se centrer sur l'aspect mathématique de cette vie bien remplie et en particulier sur sa première moitié.

Pour plus d'information, on ne saurait trop conseiller la lecture du chapitre consacré à Gauss dans [1], ainsi que le sympathique site

*http://www.geocities.com/RainForest/Vines/2977/gauss/english.html*

## 1 Eléments biographiques

### 1.1 Une vie dévolue à la Science

C.F. Gauss est né le 30 avril 1777 à Brunswick (Prusse) dans une famille pauvre et peu éduquée. Sa mère faisait des ménages avant de devenir la seconde épouse de son père, qui occupait divers petits travaux, de jardinier, contremaître au service des Eaux, assistant d'un marchand et trésorier d'un modeste fond de pension.

Enfant prodige, la légende raconte qu'il savait compter avant même de pouvoir parler, et qu'il apprit à lire seul... Il fut rapidement remarqué par ses maîtres (cf. **§2.1**), qui convainquirent son père de le laisser commencer des études au Gymnase en 1788 (plutôt que l'envoyer travailler pour aider la famille.) Il y fait de rapides progrès dans tous domaines, spécialement les mathématiques et les lettres classiques.

E. A. W. Zimmermann, professeur au Collegium Carolinium et conseiller du Duc Carl Wilhem Ferdinand de Brunswick est impressionné par le jeune prodige et l'introduit à la cour du Duc. Ce dernier, mécène dans la lignée des souverains éclairés du XVIII$^{\circ}$ siècle, accorda à Gauss, à partir de 1792, des subsides qui lui permirent d'être dès lors financièrement indépendant et de pouvoir poursuivre ses études et recherches à sa guise. Le 18 février de cette même année, il entre au Collegium Carolinium.

Il y passa trois ans, au cours desquels il fut plus intéressé par les cours de langues anciennes et modernes que par les cours de mathématiques. Durant cette période, sans se lasser de ses méditations mathématiques ni de ses calculs phénoménaux, il se destinait à devenir philologue. En octobre 1795, il quitta Brunswick et s'inscrivit à l'université de Göttingen.

C'est là que le 30 mars 1796, il fit une découverte majeure : à son réveil ce jour-là, il se rendit compte que ses expérimentations arithmétiques avaient pour conséquence que le $17 - gone$ (c'est à dire le polygone régulier à 17 côtés) est constructible à la règle et au compas, problème demeuré insoluble depuis l'antiquité grecque... (**cf. 3.3**). Cette découverte le décida à devenir mathématicien.

En septembre 1798, il revint s'installer à Brunswick pour y achever son premier ouvrage : les *Disquisitiones Arithmeticæ* (Recherches Arithmétiques). Le Duc accepta de poursuivre son mécénat et de financer la publication du livre, à condition que Gauss soutînt un doctorat, ce qui fut fait à l'Université de Helmstedt le 16 juillet 1799 sous la direction de J. F. Pfaff. Le sujet en est la première démonstration du Théorème Fondamental de l'Algèbre (cf. **§3.5**). Il en donnera d'autres, dont la dernière en 1849...

Deux ans après, un nouvel événement va venir asseoir sa notoriété grandissante : à partir du 1$^{er}$ janvier 1801, l'astronome G. Piazzi a observé pendant quarante jours un corps céleste non répertorié, avant qu'il disparaisse derrière le Soleil. Il a pu faire des relevés pour un arc de 9$^{\circ}$, et à partir de ces données, de nombreux astronomes tentèrent de calculer l'orbite de l'astre avec des méthodes traditionnelles (approximations circulaires, puis paraboliques et elliptiques). Aucun n'y parvint, jusqu'à ce que Gauss s'attaque à cette question, en septembre 1801, à peu près au moment où son publiées les *Disquisitiones Arithmeticæ*. Il publia le résultat de ses recherches en novembre (mais pas ses méthodes fondées sur les calculs de moindre carré (cf. §*3.7*), et, la nuit du 31 décembre au 1$^{er}$ janvier 1802, la "nouvelle planète" est retrouvée. Il s'agit en fait du premier astéroïde découvert : Cérès.

Moins de trois mois plus tard, le 25 mars 1802, un nouvel astre est découvert par Olbers dans la même région du Ciel, c'est Pallas. Gauss calcula rapidement son orbite et impressionne à nouveau le monde de l'astronomie par son efficacité. Il est élu membre correspondant de l'académie des sciences de Saint-Petersbourg, et on lui proposa même la direction de l'observatoire de cette ville.

Cette proposition est la manifestation de l'évolution des ambitions de Gauss à cette époque, qui ne désirait plus être mathématicien pur, et s'orientait de plus en plus vers l'astronomie.

Gauss est honoré par cette proposition venant d'une cité où a vécu Euler, mais, casanier, il préféra finalement rester à Brunswick. Son ami Olbers fit son éloge à Göttingen, et lui obtint le poste de directeur de l'observatoire nouvellement créé.

Gauss n'honorera la proposition qu'en 1807, n'ayant plus de raison de rester dans sa ville : son protecteur le Duc de Brunswick est tué par les armées Napoléoniennes menées par le général Davout lors de la bataille d'Auerstadt le 14 octobre 1806.

Entre temps, Gauss a rencontré, puis épousé le 9 octobre 1805, Johanna Osthoff. Une période de bonheur qui n'aura pas d'égale dans toute sa vie commença alors. Son premier enfant, Joseph, naquit à Brunswick le 21 août 1806. Le 21 novembre 1807, il arriva à Göttingen avec sa famille, qui devait s'agrandir d'une petite Wilhemmina (dite Minna) le 29 février 1808.

Le bonheur fut de courte durée : le 11 octobre 1809, son épouse meurt un mois après avoir donné naissance à un second fils, Louis, qui ne lui survivra que quelques mois. Gauss est détruit par cette succession de malheurs, et sombre dans une mélancolie dont il ne se remettra jamais vraiment, considérant même à cette époque que sa vie n'a pour tout sens que le devoir de protection qu'il a à l'égard de ses enfants.

Pour ne pas rester seul, le 4 août 1810 il épouse Minna Waldeck, la meilleure amie de sa défunte femme. De ce mariage de raison naîtront trois enfants : Eugene (29 aout 1811), Wilhem (23 octobre 1813) et Therese (le 9 juin 1816).

Cette période est rendue encore plus difficile par la pression fiscale que fait subir Napoléon aux Allemands : Gauss doit payer un impôt de 2000 Francs, qu'il n'a pas. Il refuse l'aide proposée par Olbers et même des Français (Laplace par exemple), et c'est un nouveau mécène, anonyme celui-là, qui lui permet de régler ce problème.

En 1809, il publia pour la première fois sa méthode des moindres carrés ("sa méthode" car Legendre en a développé une version indépendante, publiée deux ans plus tôt) dans *Théorie sur le mouvement des corps célestes tournant autour su Soleil selon des sections coniques*, seul ouvrage d'astronomie qu'il écrira de toute sa carrière. Grâce à sa méthode il peut refaire en une heure des calculs qui prirent trois jours intensifs à Euler (après lesquels il perdit la vue, dit-on).

1810 fut aussi l'année de la reconnaissance internationale : Gauss est élu à diverses académies et reçoit des hautes distinctions émanant de toute l'Europe.

Ces années furent principalement occupées par la mise en place d'un observatoire efficace, l'astronomie étant la seule activité que Gauss poursuivra continûment toute sa vie. En 1816 l'observatoire est fin prêt. Il participera toujours à des observations de routine, jusqu'à sa mort.

En 1818, une nouvelle source d'inspiration s'ouvrit à lui : la géodésie. Par intérêt scientifique (il voulait calculer le défaut de sphéricité de la terre), et par volonté de faire quelque chose d'utile, il décide de s'attaquer à l'arpentage de la région de Hanovre, afin de faire le lien avec des relevés effectués au Danemark. De plus, c'était l'occasion de quitter un moment les corvées incessantes et dévorantes que lui imposaient son activité d'astronome, tout en ayant une augmentation de salaire. Enfin, il voulait damer le pion aux Français en effectuant un calcul de la longueur du méridien terrestre plus précis que le leur !

Il commença son travail d'arpentage officiellement en 1820, ne se contentant pas de le superviser mais y participant physiquement avec passion. Motivé par le manque d'efficacité des méthodes existantes, il invente un nouvel appareil, l'héliotrope, pour mesurer les distances plus précisément. Il repose sur le couplage d'un petit télescope et de miroirs, la lumière du soleil réfléchie ainsi ayant la luminosité d'une étoile de première magnitude à 15 miles (24,14 km). Le premier prototype voit le jour en 1821 et se révèle très efficace.

Les relevés dureront jusqu'en 1825. Malheureusement, de nombreux problèmes techniques, et de santé (causés par la vie difficile de l'arpenteur), ainsi que des erreurs dans la conception globale du projet (dans le choix de la triangulation par exemple), empêchent d'atteindre la précision recherchée, et le projet sera globalement un échec.

Cependant, les questions théoriques soulevées par cette activité, amènent Gauss à parfaire ses méthodes d'analyse des données, et ses résultats les plus forts sur les moindres carrés datent de cette période. De même, il publie en 1828 un mémoire sur la courbure des surfaces ou il généralise le problème de la cartographie : comment appliquer isométriquement une surface sur une autre ? L'idée est la suivante : si on parvient à faire une telle opération, on ne change pas la *courbure* de la surface (par exemple on ne peut pas aplanir une feuille de papier courbe sans la déchirer ou la plier). Il introduit donc une manière de calculer numériquement la courbure d'une surface (cf. [3]).

Il décide de cesser les relevés sur le terrain pour se contenter de superviser le projet, afin de retourner au calme de son bureau. C'est à cette période qu'il commence à rédiger ses pensées sur la géométrie non-euclidienne et les fonctions elliptiques. Ces travaux ne seront jamais publiés de son vivant, car il cédera la place respectivement à János Bolyai et Jacob Jacobi.

En 1828, Alexander von Humboldt le convainc d'assister à ce qui sera le seul congrès de sa carrière, à Berlin. Il fut l'invité personnel de Humboldt chez qui il passa trois semaines où il eut le loisir de réfléchir au choix de ses prochaines activités. Il se tourna vers l'étude de l'électrodynamisme et du magnétisme terrestre. Par ailleurs, il fit une rencontre très importante, le jeune Wilhem Weber, 24 ans, qu'il invite à Göttingen en 1831. Dans cette période difficile (mort de sa seconde épouse), il noue une relation privilégiée avec le jeune et brillant expérimentateur qui deviendra un ami comme il n'en a jamais eu. A Göttingen, un monument célèbre cette collaboration des plus fructueuses. Gauss dirige la partie théorique, Weber la partie expérimentale.

Sur le premier plan, Gauss arrive à la conclusion, fondatrice d'une vision moderne de la physique, que pour avoir un bon système d'unités, il faut choisir des grandeurs fixes et exprimer les autres en fonction de celles-ci. C'est aussi à cette époque que Gauss formule la théorie du potentiel, également fondamentale pour la physique mathématique. Sur le plan pratique, Weber et Gauss construisirent le premier télégraphe, reliant le laboratoire de physique et l'observatoire (mais qui ne donnera pas lieu à une généralisation de ce procédé et sera détruit par la foudre en 1845).

Malheureusement, l'affaire des "Sept de Göttingen¨ vient mettre un terme en 1837 à leur collaboration (cf. **§1.3**). Weber partit pour Leipzig, et revint en 1848, trop tard pour reprendre cette collaboration, continuant seul sa brillante carrière.

Les dernières années de Gauss furent finalement assez tranquilles, il fut plusieurs fois doyen, continua son activité d'observation des étoiles, et fut de plus en plus enclin à partager son savoir avec des étudiants méritants. Son activité se ralentit lentement, mais sans jamais s'arrêter totalement. Il commença à s'occuper du fonds des veuves de l'université de Göttingen, et s'intéressait à toute l'activité politique, économique et scientifique. Grâce à d'habiles spéculations, il amassa un patrimoine considérable.

En 1854, pour la première fois de sa vie, il accepta le conseil d'un médecin. En juin, il eut le plaisir d'assister à la soutenance de la grande thèse de Riemann, qui lui montra que la relève était assurée. Il s'éteint dans son sommeil le 23 février 1854.

## 1.2 Famille

Le moins que l'on puisse dire, c'est que Gauss n'eut pas une vie familiale très heureuse...

Le père de Gauss était un homme pratique, peu éduqué, et même rustre. Il n'appréciait pas les rêveries de son fils qu'il appellait "Le contemplateur d'étoiles". Il ne croyait pas en lui, et ne comprendra jamais sa vie, jusqu'à sa mort le 14 avril 1808. Peut-être l'attitude peu compréhensive de cet homme à l'égard de son fils explique-t-elle en partie la méfiance chronique que Gauss éprouvait envers les *"Béotiens"* (cf **§2**).

La mère de Gauss savait lire mais peu ou pas écrire, bien que dotée d'une intelligence réputée remarquable (l'une des deux personnes douées dans l'environnement familial de Gauss, avec un oncle). Irréductible optimiste, elle sera le plus soutien le plus fidèle de Gauss sa vie durant. Elle vient s'installer chez lui en 1817, et l'assistera pendant 22 ans, jusqu'à sa mort le 18 avril 1839, à l'âge de 97 ans.

Johanna Osthoff, sa première épouse, fut son grand amour, trop tôt détruit par la mort de celle-ci quatre ans après leur mariage. Gauss ne se remit jamais complètement de cette perte, et sa deuxième femme Minna Waldeck, meilleure amie de la défunte, ne sera qu'une compagne de raison. Elle ne sera jamais pleinement heureuse et aura toujours une santé fragile. Elle décéde à son tour le 12 septembre 1831.

Il eut deux fils de chacun de ses mariages, Joseph et Louis (qui mourut nourrisson) puis Eugene et Wilhem. Les rapports de Gauss avec ses fils (les deux plus jeunes en particulier) semblent avoir été assez conflictuels. Ces derniers rapportent qu'il leur a interdit de s'orienter vers les sciences, car il refusait que des résultats de second ordre soient attachés à son nom ! En 1830, Eugene quitta définitivement l'Europe pour l'Amérique, suivi en 1837 par Wilhem. Ils devinrent de respectables négociants dans le Missouri.

Sa fille préférée, Minna, fille de Johanna, peut-être la plus intelligente de ses enfants, épousa G. H. A. von Ewald, orientaliste à l'université de Göttingen. Mais ce dernier, signataire de la lettre des "Sept de Göttingen" (cf. §**1.3**), est exilé en 1839, et va vivre à Tübingen, où le suit Minna, qui meurt peut de temps après de tuberculose.

Après la mort de sa seconde épouse en 1831, sa fille Thérèse prend en charge la gestion du ménage pour le restant des jours de Gauss. Elle devint alors sa confidente et son amie, lui offrant un réconfort familial dont il a été privé l'essentiel de sa vie. A sa mort, elle profite d'un testament généreux en sa faveur (mais que ne lèse pas réellement les autres enfants).

A la lecture de ce paragraphe, on peut noter a quel point le malheur et l'inconfort familial ont frappé durement Gauss. Toutefois, sa mélancolie chronique n'ont jamais entaché sa volonté d'avancer dans son travail. Elle transparaît tout de même dans une note, entre deux calculs "La mort serait plus douce qu'une pareille existence"...

## 1.3 Relations avec ses pairs et avec la société civile

Toute sa vie, Gauss fut un fervent croyant et un défenseur de la royauté éclairée (qui lui fut très bénéfique). Il fut un conservateur, considérant la démocratie avec la plus grande suspicion, et Napoléon comme un semeur de révolution. La mort de son bienfaiteur le Duc de Brunswick à la bataille d'Auerstadt en 1806 le renforça dans ses convictions.

Nationaliste, il refusa toujours d'écrire en Français (bien qu'il en fût capable) et ne se rendit jamais en France, où se trouvaient pourtant certains des rares esprits capables (peut-être) de le comprendre, et qu'il respectait scientifiquement. Il mena une vie austère et marquée par la solitude. Dès sa jeunesse, il considéra comme vital d'être utile à la nation, ce qui le détourna des mathématiques pures, considérant qu'il ne méritait pas les largesses du Duc pour une activité trop indirectement productive.

Il craignait le scandale, et se mêlait peu à ses contemporains, ce qui le mena (en conjonction avec ses convictions monarchistes) à ne pas signer en 1837 une pétition lancée par son gendre G. H. A. von Ewald et son ami W. Weber. Ces derniers faisaient partie des "Sept de Göttingen", indignés par un abus de pouvoir du roi Ernst-August de Hanovre, désireux que les serviteurs de l'Etat (dont les professeurs), lui fassent vœu d'allégeance, acte anticonstitutionnel. Sa signature aurait grandement modifié le poids de la pétition, et aurait peut-être évité l'exil de deux de ses proches (Weber revint toutefois quelques années plus tard).

En tant que mathématicien, il ne connut pratiquement que le travail solitaire, intimement persuadé que ses contemporains ne pourraient pas le comprendre. Il ne publia finalement qu'une petite partie de ses travaux, et ne rédigea probablement qu'une fraction encore plus petite de ses idées. il était très à cheval sur les questions de primauté de la découverte, beaucoup plus que sur celle de la publication - mais avec une certaine honnêteté, qui le poussait à admettre le talent des autres. Il encouragea quelques personnes, en soutînt d'autres, mais parfois une distance inhabituelle, en particulier en ce qui concernait les recherches naissantes sur les géométries non-euclidiennes (cf. §**2.3**).

Il est à noter que parmi ses quelques correspondants mathématiques figurait Sophie Germain.

Pendant l'essentiel de sa vie, il répugna à enseigner les mathématiques, et c'est l'astronomie que Möbius comme Staudt (grands géomètres allemands) étudièrent auprès de lui. A la fin de sa vie, l'enseignement l'intéressa davantage, probablement en partie parce que des élèves à sa mesure (Riemann, Dedekind) avaient fait leur apparition.

En revanche, dans ses activités scientifiques autres, il eut de nombreuses collaborations et une correspondance abondante !

# 2 Gauss et les Mathématiques

## 2.1 Enfance et adolescence

Le premier exploit enregistré de Gauss est d'avoir rectifié, à trois ans, une faute dans les comptes de son père. Fort heureusement pour la science, son père ne se rendit pas vraiment compte du potentiel commercial que représentait un pouvoir de calcul aussi précoce !

Plus tard, à l'âge de 8 ans, son maître d'Ecole donne à la classe un exercice supposé les occuper un bon moment : calculer la somme des entiers de 1 à 100. Il est très surpris de constater que le petit Gauss rend son ardoise au bout de quelques secondes avec le bon résultat inscrit dessus ! En fait, le jeune prodige avait remarqué une manière d'automatiser le calcul par une méthode générale, constatant qu'on pouvait additionner les termes deux par deux :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & 48 & + & 49 & + & 50 \\ + & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \cdots & + & 53 & + & 52 & + & 51 \\ \hline = & 101 & + & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

Soit un total de $50 \times 101 = 5050$.

On voit ici une manifestation typique de l'esprit de Gauss : systématiser un calcul afin d'en tirer une règle générale, venant de son intimité déjà impressionnante avec les règles de calcul. Notons que cette méthode se généralise aisément pour montrer la formule $1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$, et constitue un bon exercice de manipulation de formules (la démontrer par récurrence est un autre exercice utile).

## 2.2 L'Arithmétique, sous la protection du Duc de Brunswick

Pendant la période où il bénéficie du mécénat du Duc de Brunswick, Gauss s'adonne essentiellement à la *"Discipline chérie des grands mathématiciens"*, l'Arithmétique, qu'il définit ainsi dans les *Disquisitiones Arithmeticæ* :

> *cette partie des Mathématiques où l'on considère particulièrement les nombres entiers, quelquefois les fractions, mais où l'on exclut toujours les nombres irrationnels.*

Il distingue l'*Arithmétique élémentaire* et l'*Arithmétique transcendante*. Il définit cette dernière comme l'ensemble des *"recherches générales sur les affections particulières aux nombres entiers"* se référant, en lecteur respectueux des Anciens, au Livre $VII$ des *Eléments* d'Euclide et à l'œuvre de Diophante. Cependant, pour lui, leur mérite réside plus dans la rigueur et l'extraordinaire ingéniosité avec laquelle ils ont étudié des problèmes difficiles malgré la petitesse des moyens dont ils disposaient, que dans leur capacité à énoncer des vérités générales.

Son objectif est autre : dans la lignée des grand mathématiciens modernes (Fermat, Lagrange, Legendre, Euler), pour lesquels il affiche un grand respect (peut-être se sent-il déjà leur égal ?), il veut chercher le général derrière le particulier.

Il est très important de noter que lorsque Gauss commence ses études arithmétiques, en 1795, il n'a jamais lu les travaux sur ces sujets, et retrouve ainsi, seul, en quelques mois ce que ses illustres prédécesseurs ont mis des décennies à dégager - parfois avec moins de clarté que lui ! Ce n'est que fin 1796, lorsqu'il s'inscrit à Göttingen, qu'il peut enfin lire Euler, Lagrange... et constater qu'une partie de ses résultats sont déjà connus. Lorsqu'il publie les *Disquisitiones*, il garde toutefois ces parties, considérant les solutions données intéressantes, et voulant faire de son œuvre un tout cohérent. Le **§3** montre rapidement quelques merveilles tirées de ce livre.

Sa méthode de travail est à la fois phénoménale et finalement très ressemblante à ce qu'on attend d'un élève (très) studieux. Il s'amusait souvent à effectuer la division de 1 par un nombre premier (il le fit pour tous les $p < 1000$ !), avec parfois des centaines de décimales, remarquant la périodicité du développement, et tirant de ces heures de calcul un rapport intime avec les nombres. Ayant effectué toutes sortes d'expérimentations de ce type, il méditait sur ce qu'il avait trouvé, émettait des hypothèses, qui orientaient de nouvelles séries d'expérimentations...

Il découvrit ainsi le lien qu'ont ces calculs avec sa théorie des racines primitives de l'unité dans $\mathbb{C}$. Puis un matin, il se rendit compte que ces dernières avaient un rapport avec la construction du $17-$gone régulier.

De la même manière, dans ses notes, entre deux remarques géniales, on trouve des dizaines d'exercices auto-prescrits, rédigés proprement, pour comprendre par l'expérience la nature des problèmes considérés. Esprit minutieux et systématique, Gauss disait que ce qui faisait la différence entre lui et les autres était sa ténacité.

Notons que Gauss est aussi à cette époque (et même un peu plus tôt, à 15 ans d'après lui) à l'origine de la conjecture des nombres premiers, démontrée en 1896 par Hadamard :

*Si $\pi(x)$ est le nombre de nombres premiers compris entre 1 et $x$, alors $\pi(x) \simeq \frac{x}{ln(x)}$.*

Toutefois, après ses travaux sur l'astéroïde Cérès, et l'augmentation de ses subsides par le Duc, il est pris par des doutes : il ne mérite pas tant car il ne se sent pas assez utile à la nation par ses recherches de mathématiques pures et se tourne vers l'astronomie (puis la géodésie, la physique...). Ainsi, finalement sa vie d'Arithméticien Pur aura duré moins de dix ans, durant lesquels il aura révolutionné le domaine, et donné l'un des traités les plus impressionnants de l'histoire des mathématiques. Toutefois, tout au long de sa vie, il ne cessera de revenir sur ses premières amours, et donnera de nombreuses démonstrations de ses premiers résultats.

## 2.3 Entre conservatisme et modernité, le style unique de Gauss

Ce qui est frappant quand on se plonge dans les *Disquisitiones Arithmeticæ*, c'est la modernité du langage de l'auteur. Avec des connaissances de premier cycle universitaire bien ancrées, on peut lire une bonne partie du livre sans plus de préparation, alors que si l'on essaye de lire les écrits de ses contemporains, on est vite bloqué par la barrière du langage.

Habitués que nous sommes à la précision des définitions, à la volonté d'universalité qui se traduit aujourd'hui par une certaine uniformisation du langage, on ne peut que s'étonner devant des définitions peu claires ou des démonstrations qui semblent parfois plus rhétoriques que mathématiques, même chez des mathématiciens de haute volée légèrement postérieurs à Gauss (comme Kummer).

La modernité de Gauss a en grande partie consisté à mettre de l'ordre dans tous les domaines qu'il a touchés, de poser des définitions claires, de créer ou de stabiliser des notations ou des méthodes encore d'actualité (par exemples les congruences, la notion de courbure, la méthode des moindres carrés, etc...).

Il a d'ailleurs vigoureusement contesté dans sa thèse le style de mathématiciens qu'il porte aux nues dans les *Disquisitiones*, comme Lagrange ou Legendre, qui n'ont pas approché le problème du théorème fondamental de l'algèbre avec la rigueur requise.

En quelque sorte, il représente une charnière entre mathématiques anciennes et mathématiques actuelles.

Il est par ailleurs intéressant de constater que cette rigueur "moderne" est en partie conséquence de son grand respect pour les Grecs Anciens (Archimède en particulier) et il n'eut de cesse de transposer l'idéal de rigueur qui sous-tend la géométrie euclidienne à tous les domaines des mathématiques.

Comme l'annonce le titre de ce paragraphe, la particularité du style de Gauss est d'être également empreint d'un conservatisme profond, très simillaire à celui qui anime sa pensée politique.

Pendant toute sa carrière, il a toujours essayé de résoudre des grands problèmes classiques, de moderniser l'existant, songeant avant tout à ses lecteurs futurs (et à son image pour eux...). Mais il a toujours cherché à éviter, à tout prix, le scandale d'une nouveauté trop choquante pour ses contemporains, dont il considérait de toutes façons qu'ils ne pouvaient pas le comprendre. Et il craignait les conséquences possibles de cette incompréhension par dessus tout.

La manifestation la plus éclatante de cet état d'esprit est son attitude plus qu'ambiguë vis-à-vis des géométries non-euclidiennes. Le problème des géométries non-euclidiennes est le suivant : peut-on construire une géométrie consistante sans l'axiomes des parallèles, qui dit que

> *Par un point donné, il passe une et une seule parallèle à une droite donnée.*

Autrement dit, cet axiome est-il une conséquence du reste de la géométrie ? De manière plus polémique on peut se demander si la géométrie euclidienne est "la bonne" pour décrire notre monde. Les théories d'Einstein montreront que c'est le cas *en première approximation*, mais qu'il faut se départir de ce point de vue si l'on veut être plus précis.

Dès l'âge de 15 ans, Gauss s'intéressa aux conséquences qu'aurait le fait de réfuter l'axiome des parallèles et commença à sécréter l'idée qu'on pouvait inventer des géométries sans lui.

Son ami Farkas (ou Wolfgang) Bolyai, rencontré dans les premières années passées comme étudiant à Göttingen, s'intéressa à cette question toute sa vie, et eut de nombreuses discussions et une correspondance importante avec Gauss.

Dans l'une de ses lettres à son ami, Gauss disait qu'il y avait beaucoup d'assertions, qui, admises, permettaient de démontrer l'axiome des parallèles :

> *J'ai obtenu des résultats que la plupart des gens considéreraient comme une démonstration*

et ajoute plus loin

> *Cependant, le chemin que j'ai fait, loin de me mener droit au but, me fait remettre en question la validité de la géométrie.*

Tout au long de sa vie, il s'intéresse ainsi à ce problème, espérant le voir résolu de son vivant, mais n'ayant pas le temps de s'y consacrer pleinement.

A partir de 1824, un jeune mathématicien, Taurinus commence une correspondance avec Gauss. Il est le neveu de Schweikart, juriste qui a proclamé peu de temps avant l'indécidabilité de l'axiome des parallèles, sans être en mesure d'en donner une preuve.

Dans ses lettres à son jeune confrère, Gauss insiste beaucoup sur le fait que ses recherches sont partielles et inachevées. Il se met à rédiger ses travaux, certaines idées remontant à plusieurs décennies, mais se refuse toujours à les publier :

> *Il est certain que la publication du résultat de ma recherche n'est pas pour demain et il se peut même qu'il ne se fasse jamais ; j'entends déjà les cris des béotiens suscités à l'annonce de cette nouvelle conception de la géométrie*

En 1832, Farkas Bolyai lui fait parvenir un mémoire don fils János où Gauss, abasourdi, découvre une présentation systématique d'une géométrie sans l'axiome des parallèles et félicite le père du talent de son fils dans l'étude duquel il retrouve *"tous ses idées, tous ses résultats, exposés avec une grande élégance"*. Il ne répond toutefois jamais au fils, et ne s'exprime jamais en public sur cette question sensible.

En 1841, il découvre les travaux de Lobatchevski, l'un des fondateurs des géométries non-euclidiennes. Il le fait élire membre correspondant de l'Académie de la Société Scientifique Royale de Göttingen mais ne fait jamais référence à ses travaux non-euclidiens (qu'il apprécie pourtant).

Finalement, les travaux de Gauss sur cette question, incluant des calculs des angles de triangles géants mesurés à la période des relevés géodésiques, ne seront publiés qu'après sa mort. Le développement de ces nouveaux points de vue sur la géométrie ne bénéficieront pas de l'impact qu'il aurait pu donner en exprimant publiquement ses idées avant leur publication dans les années 1860.

Et des jeunes mathématiciens qu'il estimait ont du redoubler d'efforts face à l'incrédulité des "béotiens" que l'aura d'un Gauss aurait aidé à convaincre...

# 3 Quelques détails mathématiques

Dans cette section, nous allons parler un peu plus précisément, en termes mathématiques, de quelques trouvailles de Gauss, en insistant sur certaines choses qui peuvent illustrer certains cours ou TPE. Le détail des démonstrations dépassant le cadre de ce texte, n'hésitez pas à nous contacter pour voir de plus amples informations (*culturemath@dma.ens.fr*).

## 3.1 La notion de congruence

Dès la première page des *Disquisitiones Arithmeticæ*, Gauss introduit une nouvelle notion/notation que l'on utilise encore aujourd'hui : la congruence.

> *Si un nombre a divise la différence des nombres b et c,*
> *b et c sont dits* congrus *suivant a.*

Ce faisant, Gauss révolutionne l'arithmétique en donnant le premier exemple non-trivial de relation d'équivalence dans ce domaine, et remarque d'emblée que les opérations usuelles sont compatibles avec la congruence *modulo* un nombre fixé :

$$a \equiv b \ (mod.\ N) \ et \ a' \equiv b' \ (mod.\ N) \Longrightarrow a + a' \equiv b + b' \ (mod.\ N)$$

et

$$a \equiv b \ (mod.\ N) \ et \ a' \equiv b' \ (mod.\ N) \Longrightarrow a \times a' \equiv b \times b' \ (mod.\ N)$$

Ceci lui permit de voir l'arithmétique de manière beaucoup plus systématique (vision qui donnera par la suite la structure d'anneau sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) et ouvre la voie pour démontrer toute une classe de résultat ne dépendant pas de $n$ mais de sa classe *modulo* un nombre donné, permettant de passer d'un nombre *a priori* infini de cas à envisager à un nombre fini.

**Un exemple d'application :** montrons que si $a, b \in \mathbb{Z}$, alors $a^2 + b^2 \equiv 0 \ (mod.\ 7) \Longleftrightarrow [a \equiv 0 \ (mod.\ 7)] \ Et \ [b \equiv 0 \ (mod.\ 7)]$.

Considérons les restes $\overline{a}$ et $\overline{b}$ de $a$ et $b$ *modulo* 7. On a alors

$$a^2 + b^2 \equiv \overline{a}^2 + \overline{b}^2 \ (mod.\ 7)$$

et tous les cas possibles peuvent etre envisagés dans un tableau. Mettons en abscisse $\overline{a}$, en ordonnée $\overline{b}$, et dans chaque case le reste de $\overline{a}^2 + \overline{b}^2 \ (mod.\ 7)$ :

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\boxed{0}$ | 1 | 4 | 2 | 2 | 4 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 5 | 3 | 3 | 5 | 2 |
| 2 | 4 | 5 | 1 | 6 | 6 | 1 | 5 |
| 3 | 2 | 3 | 6 | 4 | 4 | 6 | 3 |
| 4 | 2 | 3 | 6 | 4 | 4 | 6 | 3 |
| 5 | 4 | 5 | 1 | 6 | 6 | 1 | 5 |
| 6 | 1 | 2 | 5 | 3 | 3 | 5 | 2 |

On voit alors clairement quel le seul cas où $\overline{a}^2 + \overline{b}^2 \equiv 0 \ (mod.\ 7)$ est celui où $\overline{a} = \overline{b} = 0$, i.e. $a \equiv 0 \ (mod.\ 7)$ ET $b \equiv 0 \ (mod.\ 7)$.

Ce résultat peut aussi se démontrer en utilisant le critère d'Euler (cf. **§3.4**).

## 3.2 Théorème de Wilson

Ce théorème, publié sans démonstration par Waring (qui l'attribue à Wilson, mais il semble que Leibniz connaissait déjà ce résultat) dit que

$$p \in \mathbb{N} \text{ est premier si et seulement si } (p-1)! \equiv -1 \ (mod. p).$$

Lagrange est le premier à avoir donné une démonstration de ce résultat en 1773, suivi d'Euler. Gauss a retrouvé ce résultat sans avoir vent des travaux passés, dans le cadre de ses réflexions propres.

Notons que le sens "$\Longleftarrow$" est beaucoup plus facile que l'autre, et peut donner lieu à un exercice en classe (par exemple, *à la Gauss*, étudier un certain nombre d'exemples et essayer d'en tirer une loi qu'on montrera ensuite dans un seul sens).

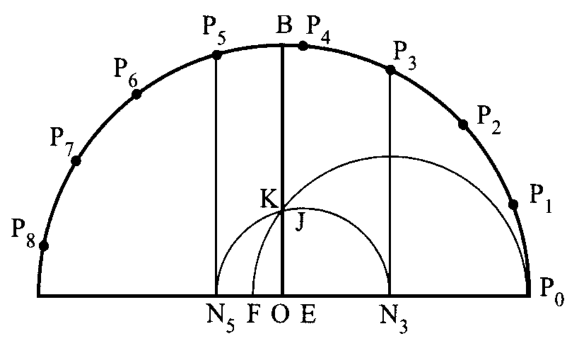
## 3.3 Construction de polygones réguliers

C'est la première grande découverte de Gauss, résolvant un problème datant de l'antiquité grecque : le polygone régulier à 17 côtés est-il constructible à la règle et au compas ? Il est intéressant de voir qu'il n'a pas résolu ce problème géométriquement mais algébriquement.

Les polygones réguliers sont en effet reliés aux racines complexes de 1 : en l'occurrence, les 17 sommets sont les 17 racines complexes de l'équation $X^{17} = 1$. Or, on peut démontrer que la construction à la règle et au compas est équivalente à la résolution d'un problème algébrique complexe fondé sur des résolutions successives d'équations du deuxième degré (pour les détails, voir [1] ou [2]).

Ce type de problèmes occupaient l'esprit de Gauss à l'époque où il est entré à Göttingen (bien qu'il se destinât a priori vers la philologie !), et un matin, il se rendit compte que ses nombreux calculs et raisonnement avaient pour conséquence que le problème algébrique lié à la construction du 17$-$gone était résoluble !

Donnons sans démonstration une construction pratique, due à Richmond (tirée de [1], qui la tire lui-même de Coxeter, *Introduction to geometry*)




On construit successivement :
- Un demi-cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$ et de rayon $OP_0$.
- $B$, le point de $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{P_0OB} = \frac{\pi}{2}$
- $J$ tel que $OJ = \frac{1}{4}OB$
- $E$ tel que $\widehat{OJE} = \frac{1}{4}\widehat{OJP_0}$
- $F$ tel que $\widehat{FJE} = \frac{\pi}{4}$
- $K$, le point d'intersection de $[OB]$ et du cercle de diamètre $[FP_0]$
- $N_3$ et $N_5$, les point d'intersection du cercle de centre $E$ et de rayon $EK$ ($N_3$ étant celui qui est situé entre $O$ et $P_0$)
- $P_3$ et $P_5$, points d'intersections du demi-cercle $\mathcal{C}$ et de la normale à $(OP_0)$ passant par $N_3$ et $N_5$

On a alors (difficile) que $\widehat{BOP_5} = \frac{5\pi}{17}$ et $\widehat{BOP_3} = \frac{3\pi}{17}$ ! Il ne reste plus qu'à construire $P_4$ en bissectant $\widehat{P_5OP_3}$, puis $P_2$ en bissectant $\widehat{BOP_4}$ et enfin $P_1$ qui nous donne tous les autres sommets par rotation.

Ouf!!! on comprend que les grecs n'aient pas trouvé : il fallait vraiment savoir algébriquement comment faire, et ils n'avaient pas ces outils.

Et encore faut-il la faire proprement : un bon exercice pour nos élèves !

### 3.4 La loi de réciprocité quadratique de Gauss-Legendre

Quelques jours après avoir démontré la constructibilité du 17-gone régulier, Gauss démontra un résultat qui échappait à la sagacité des plus grands mathématiciens : l'hypothèse d'Euler. Deux ans plus tard Legendre devait en donner une version équivalente qui restera sous le nom de loi de réciprocité quadratique de Gauss-Legendre.

La question de départ, étudiée avant Gauss entre autres par Euler et Legendre (mais sans qu'il eût connaissance de leurs travaux...) est de déterminer les *résidus quadratiques pour un nombre premier impair p.*

> Un résidu quadratique est le reste modulo $p$ du carré d'un nombre entier.

Considérons quelques exemples :
- Si $p = 3$, les résidus quadratiques sont 0, 1.
- Si $p = 5$, les résidus quadratiques sont 0, 1, 4.
- Si $p = 7$, les résidus quadratiques sont 0, 1, 2, 4.
- Si $p = 11$, les résidus quadratiques sont 0, 1, 3, 4, 5.
- Si $p = 13$, les résidus quadratiques sont 0, 1, 3, 4, 9, 12.

On peut constater qu'ils sont toujours au nombre de $\frac{p-1}{2}$ (sauriez-vous le démontrer ?), mais, en utilisant le *petit théorème de Fermat*, Euler donne un critère permettant de tous les déterminer :

> **Critère d'Euler :** un nombre $b$ est résidu quadratique *modulo* $p$ si et seulement si $b^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ (mod.\ p)$.

**Application :** On peut déduire de ce critère que $p-1$ est résidu quadratique une fois sur deux, plus précisément si et seulement si $p \equiv 1 \ (mod.\ 4)$. Voici une règle qu'il peut être intéressant de faire découvrir expérimentalement à nos élèves, mais la démontrer est une autre paire de manches !

**Application de l'application :** Revenons à l'exemple du **§3.1**, et supposons que $a^2 \equiv -b^2 \ (mod.\ 7)$, avec $a$ ou $b$ non divisible par 7. Alors on a forcément $-1$ résidu quadratique pour 7 (pourquoi ?), ce qui est impossible !

**NB :** Notons enfin que le théorème de Wilson permet, si $p \equiv 1 \ (mod.\ 4)$, de donner un entier $N$ tel que $N^2 \equiv -1 \ (mod.\ p)$ : il suffit de prendre... ?

Enonçons finalement la loi de réciprocité quadratique de Gauss-Legendre :

> *Soient $p$ et $q$ des entiers premiers impairs.*
> • *Si l'un (au moins) est de la forme $4n+1$, alors $p$ est résidu quadratique pour $q$ si et seulement si $q$ l'est pour $p$.*
> • *Si $p$ et $q$ sont tous deux de la forme $4n+3$, alors $p$ est résidu quadratique pour $q$, si et seulement si $q$* ne l'est pas *pour $p$.*

Gauss a passé un an à étudier cette question sans succès, et c'est à l'occasion de cette découverte qu'il rejoint les travaux à la pointe en arithmétique, sans les avoir même lus ! C'est finalement son acharnement qui lui permet de vaincre la difficulté que n'avaient pas totalement vaincue Euler ni Lagrange. Cette ténacité était motivée par le fait qu'il sentait derrière ce problème un grand nombre de résultats profonds. Il ne s'y est d'ailleurs pas trompé, puisque ce type de résultat se révéleront très utiles plus tard dans l'étude des nombres algébriques.

### 3.5 Théorème fondamental de l'algèbre

Les précédents résultats figuraient tous dans les *Disquisitiones Arithmeticæ*, celui-ci est un résultat déjà connu, le théorème de D'alembert, qui n'avait jamais été démontré de manière rigoureuse :

> *Tout polynôme à coefficients complexes non constant se décompose en un produit de polynômes de degré 1 à coefficients complexes.*

ou encore

> *Tout polynôme à coefficients complexes non constant a au moins une racine complexe.*

Cependant, aucune démonstration rigoureuse n'avait été donnée jusque là, et Gauss est le premier à en donner, même si son premier essai ne le satisfait pas entièrement, car *a posteriori* il y manque la notion de continuité.

Ainsi, le *théorème fondamental de l'Algèbre* ne peut pas se démontrer sans Analyse ! Différents degrés d'utilisation de l'Analyse apparaissent dans les nombreuses démonstrations de ce résultat. Le minimum qu'on puisse faire, c'est utiliser le fait qu'un polynôme de degré impair à coefficients réels a au moins une racine réelle (application directe du théorème des valeurs intermédiaires). A l'opposé, si on connaît la théorie des fonctions holomorphes (fonctions dérivables au sens complexe, objets qui, dans un certain sens, étendent les polynômes), il devient un corollaire trivial. Bien entendu cette théorie est postérieure à Gauss !

Il en donnera d'autres versions plus définitives tout au long de sa carrière (la dernière à son jubilé en 1849), illustrant une idée à laquelle il a tenu toute sa vie :

> *"chercher des nouvelles preuves aux vérités connues est au moins aussi important que les découvertes elles-mêmes"*

### 3.6 La courbure des surfaces

Gauss est le premier à avoir donné une bonne définition de la courbure. Nous vous renvoyons au texte [3] qui l'introduit sans prérequis.

### 3.7 Méthode des moindres carrés

Gauss et Legendre, ont développé l'estimation linéaire dans le but d'optimiser l'utilisation des données récoltées par l'expérience, et de prévoir le comportement du phénomène étudié hors du champ de ces données.

Ainsi Gauss a pu déterminer précisément l'orbite de l'astéroïde Cérès avec des données que les astronomes traditionnels étaient incapables d'utiliser (un arc de 9° observé par Piazzi).

A cette époque, la méthode dite des milieux spécifiait que pour une variable en dimension 1 observée $n$ fois, on disposait, en la moyenne arithmétique des $n$ observations, d'une estimation $n$ fois plus précise qu'une observation individuelle de la variable. Le problème consistait, pour ces deux grands savants, dans l'élaboration d'une généralisation de cette méthode d'estimation en dimension supérieure.

En termes mathématiques, il s'agit d'inverser, d'une façon optimale à définir, une équation

$$f(x) = y$$

où f est une fonction de classe $C^1$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, $y$ constituant la variable des observations et $x$ la variable des paramètres à déterminer. Il est clair que la solution n'est pas unique.

Gauss comme Legendre ont privilégié la méthode qu'ils appelleront "des moindres carrés". Le critère d'optimisation choisi consiste en une minimisation de la norme euclidienne du vecteur de $v = f(x) - y \in \mathbb{R}^n$, appelé *vecteur des résidus de mesure*. Il représente une partie inexplicable par f, de la mesure, assimilable grossièrement à l'erreur de mesure. Or, précisément, la norme euclidienne du vecteur v est la racine carrée de la somme des carrés de ses composantes. Ainsi, minimiser la norme du vecteur des résidus de mesure revient à minimiser la somme des carrés de ses composantes, d'où l'appellation de moindres-carrés.

La méthode des moindres carrés, bien qu'ayant été inventée il y a bientôt deux siècles, est encore très utilisée aujourd'hui, particulièrement dans les sciences de l'univers à vocation métrologique (astronomie, géodésie, mécanique céleste). Les sciences métrologiques ne sont d'ailleurs pas les seules utilisatrices des moindres carrés. Par exemple, un domaine entier des sciences économiques, l'économétrie, s'appuie sur cette technique pour élaborer des modèles d'évolution permettant une prédiction. Ainsi, l'objectif de prévision est souvent celui qui prélude à l'emploi des moindres carrés et on pourrait citer, à ce titre, beaucoup d'autres disciplines utilisatrices de cette méthode.

**NB :** Ce paragraphe se fonde sur *Estimation par moindres carrés*, de Patrick Sillard.

### 3.8 La courbe de Gauss

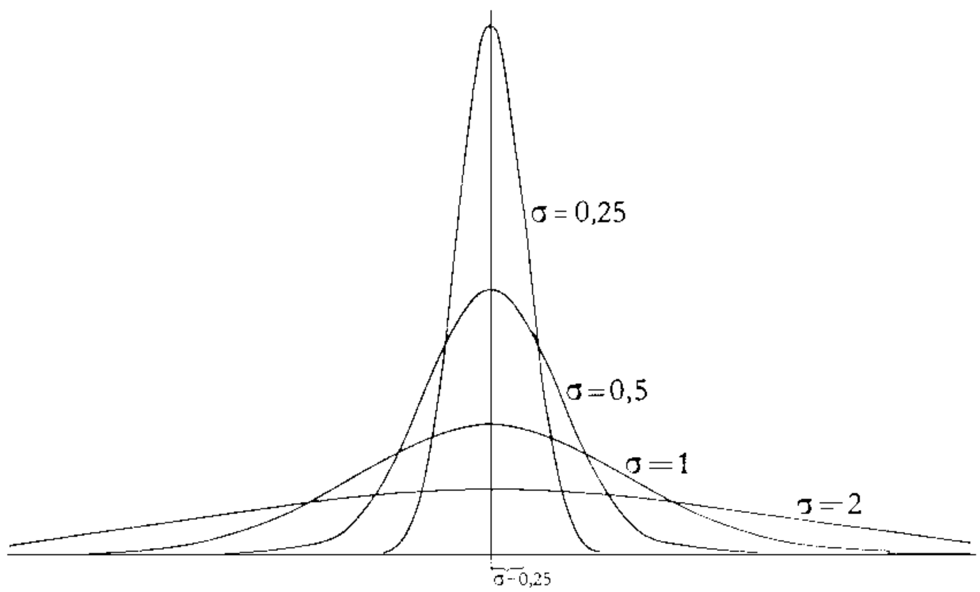
Pour finir, il est difficile de parler de Gauss sans évoquer la *gaussienne* ou *courbe en cloche* chère aux statisticiens. C'est la courbe d'une fonction représentant une distribution normale de population. Cela part d'une idée simple : dans une population donnée, si on classe les individus selon une caractéristique donnée, on s'aperçoit que, plus on s'approche de la moyenne sur le critère considéré, et plus il y a d'individus. Plus on s'en éloigne, et moins il y en a.

Gauss a quantifié la manière dont les données se répartissent, obtenant ainsi une loi dite "normale" qui correspond bien à de nombreux phénomènes naturels. La fonction $x \longmapsto f(x)$ qu'il a définie pour donner le nombre de personnes en fonction de la caractéristique $x$ considérée dépend de trois paramètres :
- $\mu$ : la moyenne de la caractéristique $x$ sur la population considérée.
- $\sigma$ : son écart-type.
- $N$ : le nombre de membres de la population.

La formule est alors

$$f(x) = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Quelques exemples de telles distributions pour $\sigma$ variable :




# Références


[1] Simon Gindikin, *Histoires de mathématiciens et de physiciens*, ed. Cassini.

[2] Thomas Chomette, *Construction des polygones réguliers*, sur http ://www.dma.ens.fr/culturemath/dossiers

[3] Patrick Popescu-Pampu, *Nouer, c'est courber*, sur http ://www.dma.ens.fr/culturemath/dossiers