

Nombres réels

1 Suites de rationnels

Définition Une *suite de rationnels* (ou suite *rationnelle*) est une application $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$.

NOTATION : Pour tout entier n , on note u_n l'image $u(n)$ de l'entier n par l'application u . La suite u est souvent notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, voire tout simplement (u_n) .

NOTATION : On notera par la suite \mathfrak{S} l'ensemble de toutes les suites rationnelles.

1.1 Addition sur \mathfrak{S}

Définition Pour deux suites u et v de \mathfrak{S} , on définit la somme de ces suites, de façon naturelle, comme leur somme en tant qu'applications, c'est-à-dire :

$$u + v = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Théorème 1.1 *Muni de la loi $+$, l'ensemble \mathfrak{S} possède une structure de groupe commutatif.*

Démonstration : Les propriétés de l'addition sur \mathfrak{S} découlent immédiatement des propriétés correspondantes dans \mathbb{Q} : la commutativité de l'addition sur \mathbb{Q} implique la commutativité sur \mathfrak{S} ; de même pour l'associativité, pour l'élément neutre $(0)_{n \in \mathbb{N}}$, et enfin pour le symétrique de toute suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui n'est autre que la suite $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que l'on notera bien sûr $-u$.

□

1.2 Multiplication sur \mathfrak{S}

Définition On définit également le produit de deux suites u et v de \mathfrak{S} comme le produit terme à terme :

$$u \times v = (u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Tout comme pour l'addition, les propriétés de la multiplication sur \mathbb{Q} permettent d'obtenir le :

Théorème 1.2 *La multiplication sur \mathfrak{S} est commutative, associative, distributive sur l'addition, et possède l'élément neutre $(1)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Corollaire 1.3 *$(\mathfrak{S}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.*

En revanche, la structure de corps ne se transpose pas sur \mathfrak{S} , en effet les deux suites u et v suivantes, non nulles, ont pour produit la suite nulle :

$$u : \begin{cases} u_{2n} = 0 \quad \forall n \\ u_{2n+1} = 1 \quad \forall n \end{cases} \quad v : \begin{cases} v_{2n} = 1 \quad \forall n \\ v_{2n+1} = 0 \quad \forall n \end{cases}$$

En réalité, les éléments de \mathfrak{S} inversibles pour la multiplication sont les suites dont *tous les termes* sont non nuls. À cette condition, on trouve un inverse pour la suite en considérant la suite des inverses.

2 Sous-ensembles remarquables de \mathfrak{S}

Définition La suite rationnelle $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 si et seulement si elle vérifie la propriété :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{Q}_+^* \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies |u_n| < \epsilon$$

L'ensemble des suites convergeant vers 0 sera noté \mathcal{I} . De la même façon, on a la notion de convergence vers un rationnel α autre que 0 en remplaçant $|u_n|$ par $|u_n - \alpha|$ dans la définition. (On utilisera aussi cette définition dans \mathbb{R} .)

Définition La suite rationnelle $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* si et seulement si elle vérifie la propriété :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{Q}_+^* \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, p \in \mathbb{N}, \quad (n \geq n_0 \text{ et } p \geq n_0) \implies |u_n - u_p| < \epsilon$$

Leur ensemble sera noté \mathcal{C} .

Définition Enfin, la suite rationnelle $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *bornée* si et seulement si :

$$\exists A \in \mathbb{Q}_+ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq A$$

Leur ensemble sera noté \mathcal{B} .

Théorème 2.1 On a les inclusions :

$$\mathcal{I} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{B}$$

Démonstration :

– $\boxed{\mathcal{I} \subset \mathcal{C}}$ Soit $u \in \mathcal{I}$ et $\epsilon > 0$. Soit, d'après la définition de \mathcal{I} , n_0 un entier tel que $n \geq n_0 \implies |u_n| < \frac{\epsilon}{2}$.

Pour n et p deux entiers vérifiant $n \geq n_0$ et $p \geq n_0$, on a alors, grâce à l'inégalité triangulaire, la majoration :

$$|u_n - u_p| \leq |u_n| + |u_p| < \epsilon$$

et donc la suite u vérifie le critère d'appartenance à \mathcal{C} .

– $\boxed{\mathcal{C} \subset \mathcal{B}}$ Soit $u \in \mathcal{C}$ et $\epsilon > 0$ désormais fixé (par exemple, $\epsilon = 1$). Soit, d'après la définition de \mathcal{C} , n_0 un entier tel que pour tous n et p , on ait :

$$(n \geq n_0 \text{ et } p \geq n_0) \implies |u_n - u_p| < \epsilon$$

Pour tout entier $n \geq n_0$, on a alors :

$$|u_n - u_{n_0}| < \epsilon$$

et donc $\| |u_n| - |u_{n_0}| \| < \epsilon$

En posant $A = \max(|u_{n_0}| + \epsilon, |u_0|, \dots, |u_{n_0-1}|)$, on a bien pour tout entier n :

$$|u_n| \leq A$$

et donc la suite u est bien bornée. □

Théorème 2.2 \mathcal{C} est un sous-anneau de \mathfrak{S} .

Démonstration :

– $\boxed{\forall u, v \in \mathcal{C}, u - v \in \mathcal{C} :}$ Soient donc u et v , soit $\epsilon > 0$, et soient :

– n_1 tel que $(n \geq n_1 \text{ et } p \geq n_1) \implies |u_n - u_p| < \frac{\epsilon}{2}$.

– n_2 tel que $(n \geq n_2 \text{ et } p \geq n_2) \implies |v_n - v_p| < \frac{\epsilon}{2}$.

Pour n et p deux entiers supérieurs ou égaux à $n_0 = \max(n_1, n_2)$, on a alors :

$$|(u_n - v_n) - (u_p - v_p)| \leq |u_n - u_p| + |v_n - v_p| < \epsilon$$

et donc la suite $u - v$ est encore de Cauchy.

– $\boxed{\forall u, v \in \mathcal{C}, u \times v \in \mathcal{C} :}$ Soient encore u et v deux suites de Cauchy, donc bornées d'après le théorème précédent, et soit donc A un majorant de ces deux suites.

Soit $\epsilon > 0$ et soit, d'après la définition d'une suite de Cauchy :

– n_1 tel que $(n \geq n_1 \text{ et } p \geq n_1) \implies |u_n - u_p| < \frac{\epsilon}{2A}$.

– n_2 tel que $(n \geq n_2 \text{ et } p \geq n_2) \implies |v_n - v_p| < \frac{\epsilon}{2A}$.

Soit encore $n_0 = \max(n_1, n_2)$, et deux entiers n et p supérieurs ou égaux à n_0 . Alors

$$\begin{aligned} |u_n v_n - u_p v_p| &= |u_n (v_n - v_p) + v_p (u_n - u_p)| \\ &\leq |u_n| \times |v_n - v_p| + |v_p| \times |u_n - u_p| \\ &\leq A \times \frac{\epsilon}{2A} + A \times \frac{\epsilon}{2A} \end{aligned}$$

$$|u_n v_n - u_p v_p| \leq \epsilon$$

et donc la suite $u \times v$ est encore de Cauchy.

– $\boxed{(1)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C} :}$ Immédiat. □

Théorème 2.3 \mathcal{I} est un idéal de \mathcal{C} .

Démonstration :

– \mathcal{I} est un sous-groupe additif de \mathcal{C} : soient u et v deux suites convergeant vers 0, soit $\epsilon > 0$ et soient

– n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, on ait $|u_n| < \frac{\epsilon}{2}$.

– n_2 tel que pour tout $n \geq n_2$, on ait $|v_n| < \frac{\epsilon}{2}$.

Soit $n_0 = \max(n_1, n_2)$, et $n \geq n_0$. Alors $|u_n - v_n| \leq |u_n| + |v_n| < \epsilon$, et donc la suite $u - v$ converge également vers 0.

– $\boxed{\forall u \in \mathcal{I} \forall v \in \mathcal{C}, u \times v \in \mathcal{I}}$ Soit donc $u \in \mathcal{I}$ et $v \in \mathcal{C}$. En particulier, v est bornée. Soit donc A un majorant de v .

Soit $\epsilon > 0$ et n_0 tel que $n \geq n_0 \implies |u_n| < \frac{\epsilon}{A}$. Pour $n \geq n_0$, on a alors :

$$|u_n v_n| \leq |u_n| \cdot |v_n| < \frac{\epsilon}{A} \times A = \epsilon$$

et donc la suite $u \times v$ est dans \mathcal{I} . □

Enfin, dire pour l'instant que les suites de Cauchy convergent n'aurait pour l'instant aucun sens : ce résultat est vrai dans \mathbb{R} , et nous sommes justement en train de construire \mathbb{R} . En revanche, connaissant \mathbb{Q} , on peut dire que toute suite de Cauchy est, à partir d'un certain rang, « coincée » dans un intervalle de longueur aussi petite que l'on veut. En fait, on a besoin pour la suite d'un résultat plus faible, qui est le suivant :

Théorème 2.4 *Soit $u \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{I}$. alors il existe un rationnel strictement positif a et un entier n_0 tel que l'on ait :*

$$n \geq n_0 \implies u_n \geq a \quad \text{ou bien} \quad n \geq n_0 \implies u_n \leq -a$$

C'est-à-dire qu'une suite de Cauchy qui ne converge pas vers 0 est, à partir d'un certain rang, minorée par un rationnel strictement positif ou majorée par un rationnel strictement négatif. En particulier, la suite est alors de signe constant et ne s'annule pas (toujours à partir d'un certain rang).

Démonstration : Soit donc u une suite de Cauchy ne convergeant pas vers 0, et supposons le résultat faux, c'est-à-dire que pour tout rationnel a strictement positif et tout entier n , on puisse trouver :

- Un entier $n_1 \geq n$ tel que $u_{n_1} < a$.
- Un entier $n_2 \geq n$ tel que $u_{n_2} > -a$.

Soit $\epsilon > 0$ et n_0 tel que pour $n \geq n_0$ et $p \geq n_0$, on ait $|u_n - u_p| < \frac{\epsilon}{3}$. En appliquant notre hypothèse de raisonnement par l'absurde à $a = \frac{\epsilon}{3}$ et $n = n_0$, on trouve deux entiers $n_1 \geq n_0$ et $n_2 \geq n_0$, tels que $u_{n_1} < \frac{\epsilon}{3}$ et $u_{n_2} > -\frac{\epsilon}{3}$

Mais alors, par définition de n_0 , on a donc $|u_{n_1} - u_{n_2}| < \frac{\epsilon}{3}$, et donc :

$$u_{n_1} = u_{n_2} + (u_{n_1} - u_{n_2}) > -\frac{\epsilon}{3} - \frac{\epsilon}{3}$$

c'est-à-dire
$$-\frac{2\epsilon}{3} < u_{n_1} < \frac{\epsilon}{3}$$

et donc $|u_{n_1}| < \frac{2\epsilon}{3}$. Pour tout entier $n \geq n_0$, on a donc

$$|u_n| = |u_{n_1} + (u_n - u_{n_1})| \leq |u_{n_1}| + |u_n - u_{n_1}| < \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

On a montré que la suite u vérifie alors le critère de convergence vers 0 pour le rationnel ϵ . Comme tout ceci est bien sûr valable quel que soit ϵ , cela signifie que la suite u converge vers 0, ce qui contredit l'hypothèse $u \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{I}$. L'hypothèse supplémentaire est donc absurde, et le théorème démontré. □

3 Définition des réels

Muni de tous ces résultats préliminaires, nous sommes désormais en mesure de définir l'ensemble des nombres réels, comme quotient de l'anneau \mathcal{C} par son idéal \mathcal{I} . Précisons cette opération :

Sur l'ensemble \mathcal{C} des suites de Cauchy, on définit la relation binaire \mathfrak{R} par :

$$u\mathfrak{R}v \iff u - v \in \mathcal{I}$$

Comme l'idéal \mathcal{I} est en particulier un sous-groupe additif de \mathcal{C} , on vérifie sans difficulté que \mathfrak{R} est bien une relation d'équivalence.

Définition On appelle *nombre réel* une classe d'équivalence de suites de Cauchy pour la relation \mathfrak{R} . L'ensemble des réels, noté \mathbb{R} , peut donc être défini comme l'ensemble quotient \mathcal{C}/\mathfrak{R} (encore noté \mathcal{C}/\mathcal{I}).

N.B. L'idéal \mathcal{I} constitue lui-même une classe d'équivalence pour la relation \mathfrak{R} : celle du réel nul. En effet, il contient la suite constante égale à 0.

NOTATION : On notera \bar{u} la classe d'équivalence d'une suite u pour la relation \mathfrak{R} . La notation $u \in \alpha$, où α est un nombre réel, signifie que la suite u est un *représentant* de la classe α .

3.1 Addition et multiplication dans \mathbb{R}

La relation \mathfrak{R} est bien sûr compatible avec les opérations d'addition et de multiplication sur \mathcal{C} . En effet, si u, u', v et v' sont des suites de Cauchy, alors :

$$\begin{aligned} u\mathfrak{R}u' \text{ et } v\mathfrak{R}v' &\iff u - u' \in \mathcal{I} \text{ et } v - v' \in \mathcal{I} \\ &\implies (u + v) - (u' + v') \in \mathcal{I} \\ &\implies (u + v)\mathfrak{R}(u' + v') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De même } u\mathfrak{R}u' \text{ et } v\mathfrak{R}v' &\iff u - u' \in \mathcal{I} \text{ et } v - v' \in \mathcal{I} \\ &\implies uv - u'v' = u(v - v') + v'(u - u') \in \mathcal{I} \\ &\implies (uv)\mathfrak{R}(u'v') \end{aligned}$$

Par passage au quotient, ces opérations héritent des propriétés de commutativité, associativité et distributivité. C'est-à-dire que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau commutatif. De plus, le passage au quotient permet d'obtenir la structure de corps :

Théorème 3.1 $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Démonstration : La seule chose à vérifier est ici que tout réel non nul est inversible (pour la multiplication). Soit donc $\bar{u} \neq \bar{(0)}$ un réel, u un de ses représentants. Par hypothèse, $u \notin \mathcal{I}$ (la classe d'un élément de \mathcal{I} est le réel nul) donc d'après le théorème 2.4, la suite u est non nulle à partir d'un certain rang, disons n_0 .

Soit alors v la suite définie par :

$$v_0 = \dots = v_{n_0} = 1 \text{ et } \forall n > n_0, v_n = u_n$$

La suite v ainsi construite ne s'annule pas, donc est inversible, d'inverse $\frac{1}{v} = \left(\frac{1}{v_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$. D'autre part, la suite $u - v$ étant par construction nulle à partir du rang n_0 , elle est dans l'idéal \mathcal{I} , et donc $v \in \bar{u}$.

Il vient
$$\bar{u} \times \frac{\bar{1}}{v} = \bar{v} \times \frac{\bar{1}}{v} = \overline{(1)}$$

c'est-à-dire que le réel \bar{u} est inversible. □

NOTATION : Tout comme précédemment pour les rationnels, on notera respectivement $-\alpha$ et $\frac{1}{\alpha}$ l'opposé et l'inverse du réel α . Enfin, si α et β sont deux réels, les expressions $\alpha - \beta$ et $\frac{\alpha}{\beta}$ désignent respectivement les réels $\alpha + (-\beta)$ et $\alpha \times \frac{1}{\beta}$.

3.2 Relation d'ordre sur \mathbb{R}

Définition Un réel α est dit *positif* si et seulement si :

- α est le réel nul, ou
- α possède un représentant u qui vérifie

$$\exists a \in \mathbb{Q}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies u_n \geq a$$

c'est-à-dire la première alternative du théorème 2.4.

L'ensemble des réels positifs est noté \mathbb{R}_+ . On note \mathbb{R}_+^* l'ensemble $\mathbb{R}_+ \setminus \{\overline{(0)}\}$ des réels positifs et non nuls, dits *strictement positifs*.

Dans cette définition, on est tenté d'imaginer que la propriété décrite dépend du représentant choisi. En réalité, il n'en est rien :

Théorème 3.2 *Soit α un réel strictement positif. Alors*

$$\forall v \in \alpha, \exists n_v \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{Q}_+^* \quad (n \geq n_v \implies v_n > 0)$$

Démonstration : Soit donc α un réel strictement positif. Par définition de \mathbb{R}_+^* , il existe un représentant u de α , un rationnel a strictement positif et un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_n > a$.

Soit alors $v \in \alpha$ un autre représentant du réel α . Alors la suite $v - u$ est dans l'idéal \mathcal{I} , donc il existe un entier n_2 tel que, pour $n \geq n_2$, on ait $|v_n - u_n| < \frac{a}{2}$, et donc $v_n \geq u_n - \frac{a}{2}$.

Pour $n \geq \max(n_1, n_2)$, on a alors $u_n \geq a$ et $v_n \geq u_n - \frac{a}{2}$, donc $v_n \geq \frac{a}{2} > 0$. □

N.B. On définit de manière similaire les réels négatifs, les ensembles \mathbb{R}_- et \mathbb{R}_-^* , et l'on a bien sûr une propriété analogue pour les réels strictement négatifs.

Propriétés :

- $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$:

En effet, si α est un réel de $\mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_-^*$, et v un de ses représentants, celui-ci devrait vérifier les deux conditions :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, v_n > 0$$

et

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, v_n < 0$$

Ces conditions sont évidemment contradictoires.

- $\alpha \in \mathbb{R}_+ \implies -\alpha \in \mathbb{R}_-$:
Immédiat par la définition de \mathbb{R}_+ et de \mathbb{R}_- .
- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \implies \alpha + \beta \in \mathbb{R}_+$:
C'est évident si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. Sinon, soit u et v des représentants de α et β respectivement, et
 - n_1, a_1 tels que $n \geq n_1 \implies u_n \geq a_1 > 0$,
 - n_2, a_2 tels que $n \geq n_2 \implies v_n \geq a_2 > 0$.
 Pour $n \geq \max(n_1, n_2)$, on a alors nécessairement $u_n + v_n \geq a_1 + a_2$, donc la suite $u + v$ vérifie le critère voulu, et $\alpha + \beta \in \mathbb{R}_+$.
- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \implies \alpha\beta \in \mathbb{R}_+$:
Même principe. On a de même, grâce à la règle des signes dans \mathbb{Q} :

$$\alpha \in \mathbb{R}_+, \beta \in \mathbb{R}_- \implies \alpha\beta \in \mathbb{R}_-$$

et enfin $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_- \implies \alpha\beta \in \mathbb{R}_+$

- $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$:
Soit en effet $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$, et u un représentant de α . Comme α est non nul, u n'est pas dans \mathcal{I} .
D'après le théorème 2.4, la possibilité $u_n \geq a > 0$ étant exclue (car sinon $\alpha \in \mathbb{R}_+$), on a un entier n_0 et un rationnel a tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq -a < 0$. Donc $\alpha \in \mathbb{R}_-$.

Définition On définit la relation binaire \leq sur \mathbb{R} par :

$$\alpha \leq \beta \iff \beta - \alpha \in \mathbb{R}_+$$

Théorème 3.3 \leq est une relation d'ordre totale sur \mathbb{R} .

Démonstration :

- Réflexivité : pour tout α , on a $\alpha - \alpha = 0 \in \mathbb{R}_+$.
- Antisymétrie : $(\alpha \leq \beta \text{ et } \beta \leq \alpha) \implies (\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \alpha - \beta \in \mathbb{R}_+)$.
Alors $\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$ donc $\alpha = \beta$.
- Transitivité : $(\alpha \leq \beta \text{ et } \beta \leq \gamma) \implies (\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \gamma - \beta \in \mathbb{R}_+)$.
Alors $\gamma - \alpha = (\gamma - \beta) + (\beta - \alpha) \in \mathbb{R}_+$, et donc $\alpha \leq \gamma$.
- Ordre total : on sait que $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$. Si α et β sont deux réels, leur différence $\beta - \alpha$ est donc soit dans \mathbb{R}_+ soit dans \mathbb{R}_- .
Dans le premier cas, on a alors $\alpha \leq \beta$. Sinon, $\alpha - \beta = -(\beta - \alpha) \in \mathbb{R}_+$ et donc $\beta \leq \alpha$.

□

Remarque $\alpha \geq 0 \iff \alpha - 0 \in \mathbb{R}_+ \iff \alpha \in \mathbb{R}_+$

De même $\alpha \leq 0 \iff \alpha \in \mathbb{R}_-$

Propriété 3.4 \leq est compatible avec l'addition sur \mathbb{R} .

Démonstration : Soient α, β, γ et δ des réels vérifiant $\alpha \leq \beta$ et $\gamma \leq \delta$.

On a alors $\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+$ et $\delta - \gamma \in \mathbb{R}_+$

donc $(\beta - \alpha) + (\delta - \gamma) = (\beta + \delta) - (\alpha + \gamma) \in \mathbb{R}_+$

et donc $\alpha + \gamma \leq \beta + \delta$

□

Propriété 3.5 \leq est compatible avec la multiplication sur \mathbb{R}_+ .

Démonstration : Soient α, β, γ et δ des éléments de \mathbb{R}_+ vérifiant $\alpha \leq \beta$ et $\gamma \leq \delta$.

On a alors
$$\beta - \alpha \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \delta - \gamma \in \mathbb{R}_+$$

donc
$$\beta\delta - \alpha\gamma = \beta(\delta - \gamma) + \gamma(\beta - \alpha) \in \mathbb{R}_+$$

et donc
$$\alpha\gamma \leq \beta\delta \quad \square$$

Enfin, le passage de \mathbb{Q} à \mathbb{R} conserve également la structure archimédienne :

Propriété 3.6 \mathbb{R} est archimédien.

Démonstration : Soient α et β deux réels strictement positifs. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un représentant de α et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un représentant de β . D'après le théorème 3.2, on peut trouver un rationnel a strictement positif et un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait $a_n \geq a$.

D'autre part, la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc bornée. Soit b un majorant (dans \mathbb{Q}). Comme le corps \mathbb{Q} est lui-même archimédien, il existe un entier p tel que $p \times a \geq b$. Mais alors, pour $n \geq n_0$ on a $p \times a_n \geq p \times a \geq b \geq b_n$.

La suite $(p \times a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc positive à partir du rang n_0 , et le réel $p \times \alpha - \beta$ est donc dans \mathbb{R}_+ (cette propriété étant contradictoire avec la définition de \mathbb{R}_-^*).

Et donc
$$p \times \alpha \geq \beta \quad \square$$

4 Plongement de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}

Soit \mathbb{R}' le sous-ensemble de \mathbb{R} défini par :

$$\alpha \in \mathbb{R}' \iff \exists k \in \mathbb{Q}, (k)_{n \in \mathbb{N}} \in \alpha$$

N.B. Le rationnel k ainsi associé est unique : si un autre rationnel h est tel que $(h)_{n \in \mathbb{N}} \in \alpha$, alors ceci signifie que les deux suites $(k)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(h)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dans la même classe d'équivalence, c'est-à-dire que leur différence est dans l'idéal \mathcal{I} des suites convergeant vers 0. Or leur différence est la suite $(k - h)_{n \in \mathbb{N}}$, constante. Pour qu'elle converge vers 0, il faut que ce soit la suite nulle, soit $h = k$.

Théorème 4.1 \mathbb{R}' est un sous-corps de \mathbb{R} .

Démonstration :

– Soient α et β dans \mathbb{R}' , h et k des rationnels tels que l'on ait $(h)_{n \in \mathbb{N}} \in \alpha$ et $(k)_{n \in \mathbb{N}} \in \beta$.

Alors la suite $(h)_{n \in \mathbb{N}} - (k)_{n \in \mathbb{N}} = (h - k)_{n \in \mathbb{N}}$ est un représentant du réel $\alpha - \beta$, qui est donc lui aussi dans \mathbb{R}' .

Donc \mathbb{R}' est un sous-groupe additif de \mathbb{R} .

– De la même façon, on montre que \mathbb{R}' est stable par multiplication, et contient l'élément neutre (pour la multiplication) $(1)_{n \in \mathbb{N}}$.

– Enfin, soit $\alpha \in \mathbb{R}'$ et h un rationnel tel que $(h)_{n \in \mathbb{N}} \in \alpha$. La suite $\left(\frac{1}{h}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ permet alors d'obtenir un inverse de α dans \mathbb{R}' .

\square

Il est alors immédiat de vérifier que l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}' \\ h \mapsto \overline{(h)}_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

définit un isomorphisme entre $(\mathbb{Q}, +, \times)$ et $(\mathbb{R}', +, \times)$.

Enfin, φ est compatible avec les relations d'ordre sur \mathbb{Q} et \mathbb{R} :

Propriété 4.2 $\forall h, k \in \mathbb{Q}, \quad (h \leq k \iff \varphi(h) \leq \varphi(k))$

Démonstration : En effet

$$\begin{aligned} \varphi(h) \leq \varphi(k) &\iff \overline{(k)}_{n \in \mathbb{N}} - \overline{(h)}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+ \iff \overline{(k-h)}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+ \\ &\iff k-h \geq 0 \iff h \leq k \end{aligned} \quad \square$$

Convention : Via l'isomorphisme φ , on identifie \mathbb{Q} et \mathbb{R}' en écrivant, dans \mathbb{R} , h pour désigner le réel $\overline{(h)}_{n \in \mathbb{N}}$.

Ceci permet de considérer l'ensemble \mathbb{R} des réel comme un *prolongement* de l'ensemble \mathbb{Q} des rationnels ; l'addition, la multiplication et la relation \leq définies sur \mathbb{R} prolongeant l'addition, la multiplication et la relation \leq sur \mathbb{Q} .

N.B. \mathbb{R} est une extension stricte de \mathbb{Q} , ce qui fait tout l'intérêt de cette construction. Pour voir ceci, il suffit remarquer que toutes les suites de Cauchy, dans \mathbb{Q} , qui ne convergent pas, vont converger dans \mathbb{R} (cf en annexe la démonstration de la complétude de \mathbb{R}). La limite d'une telle suite est alors un élément de \mathbb{R} qui n'était pas dans \mathbb{R}' , sinon on aurait la convergence dans \mathbb{Q} grâce à l'isomorphisme φ^{-1} .

EXEMPLE : La suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n 1/k!$ est une suite de Cauchy de rationnels, qui ne converge pas dans \mathbb{Q} .

5 Valeur absolue sur \mathbb{R}

Définition Prolongeant la définition de la valeur absolue sur \mathbb{Q} , on associe à tout réel α sa *valeur absolue* $|\alpha|$ par :

$$|\alpha| = \max(\alpha, -\alpha)$$

Cette valeur absolue est bien définie, en effet nous avons montré que l'ensemble \mathbb{R} est totalement ordonné (et donc la famille $(\alpha, -\alpha)$ possède un plus grand élément).

Théorème 5.1 *Soit α un réel et u un de ses représentants. Alors la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est encore une suite de Cauchy, et est un représentant de $|\alpha|$.*

Démonstration : On distingue trois cas :

– $\alpha = 0$, et donc $u \in \mathcal{I}$.

Alors la suite de terme général $|u_n|$ converge également vers 0. Comme dans ce cas $|\alpha| = 0$, c'est bien un représentant de $|\alpha|$.

– $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, et donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{Q}, n \geq n_0 \implies u_n \geq a > 0$.

Pour $n \geq n_0$, on a alors $|u_n| = u_n$, et donc la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ coïncide avec la suite u à partir du rang n_0 . C'est donc également une suite de Cauchy, de la même classe d'équivalence que la suite u , c'est-à-dire que c'est un représentant du réel $\alpha = |\alpha|$.

– $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$.

De la même façon, à partir d'un certain rang on a $|u_n| = -u_n$, et donc la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ coïncide avec la suite $-u$: elle est donc de Cauchy, représentant du réel $-\alpha = |\alpha|$.

□

Propriétés :

– $|\alpha| = 0 \iff \alpha = 0$:

$\boxed{\Leftarrow}$ est immédiat d'après le premier point de la démonstration précédente.

$\boxed{\Rightarrow}$ Par contraposée, si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, alors $|\alpha| = \alpha \neq 0$ d'après le deuxième point. Et si $\alpha \in \mathbb{R}_-^*$, alors d'après le troisième point $|\alpha| = -\alpha$ donc $|\alpha| \in \mathbb{R}_+^*$.

– $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$:

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des représentants de α et β deux réels. D'après le théorème 5.1, la suite $(|a_n + b_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est un représentant de $|\alpha + \beta|$, tout comme les suites $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(|b_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des représentants des réels $|\alpha|$ et $|\beta|$ respectivement.

Or, d'après l'inégalité triangulaire dans \mathbb{Q} , on sait que pour tout entier n , on a $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|$. La suite $(|a_n| + |b_n| - |a_n + b_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ a donc tous ses termes positifs, et donc $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

– $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, |\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$:

Avec les mêmes notations, un représentant de $|\alpha\beta|$ est la suite $(|a_n b_n|)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire en utilisant la même propriété dans \mathbb{Q} (déjà démontrée), la suite $(|a_n| \cdot |b_n|)_{n \in \mathbb{N}}$, dans laquelle on reconnaît l'expression du produit des deux suites de Cauchy $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(|b_n|)_{n \in \mathbb{N}}$, d'où la propriété annoncée.

Annexe : Topologie de \mathbb{R}

Nous terminons cette construction des nombres réels par des propriétés d'ordre topologique. Nous avons construit \mathbb{R} comme l'ensemble des suites de Cauchy de rationnels (quotienté par l'idéal des suites convergeant vers 0). Nous allons voir ici qu'il ne servirait à rien de recommencer une telle construction en espérant obtenir d'autres nombres, ce qui n'aurait *a priori* rien d'absurde. En fait, toute suite de Cauchy de réels converge elle-même vers un réel : on exprime cette propriété en disant que l'ensemble \mathbb{R} est complet.

Lemme \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

Démonstration : Soient α et β deux réels vérifiant $\alpha < \beta$. On cherche un rationnel $a \in]\alpha; \beta[$.

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des représentants de α et β . On a $\beta - \alpha > 0$ donc il existe un rationnel $\epsilon > 0$ et un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on ait $b_n - a_n \geq \epsilon$ (théorème 2.4, la deuxième possibilité étant exclue).

Soit ensuite, en utilisant la définition d'une suite de Cauchy, $n_1 \geq n_0$ tel que pour tous $n, p \geq n_1$, $|a_n - a_p| < \frac{\epsilon}{4}$ et $|b_n - b_p| < \frac{\epsilon}{4}$.

Il suffit alors de poser $a = a_{n_1} + \frac{\epsilon}{2}$. En effet, on a pour tout $n \geq n_1$:

$$a_n \leq a_{n_1} + \frac{\epsilon}{4} \leq a - \frac{\epsilon}{4}$$

D'autre part $n_1 \geq n_0$ donc $b_{n_1} \geq a_{n_1} + \epsilon$ et donc pour tout $n \geq n_1$:

$$b_n \geq b_{n_1} - \frac{\epsilon}{4} \geq a + \frac{\epsilon}{4}$$

Le rationnel a construit est donc bien dans l'intervalle $] \alpha ; \beta [$. □

Afin de démontrer la complétude de \mathbb{R} , on a besoin du lemme technique qui suit. Rappelons l'existence d'un plongement φ de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} . Via ce plongement, une suite de Cauchy de rationnels nous donne une suite de Cauchy (de rationnels également) dans \mathbb{R} .

Lemme Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de rationnels, et α le réel qu'elle représente. Considérée dans \mathbb{R} , la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, vers le réel α .

Démonstration : Soit ϵ un réel strictement positif, et soit ϵ' un rationnel vérifiant $0 < \epsilon' \leq \epsilon$ (c'est possible car \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R}).

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n, p \geq n_0 \implies |u_n - u_p| < \epsilon'$.

Pour $n \geq n_0$ désormais fixé, ceci implique que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est comprise, à partir du rang n_0 , entre la suite constante égale à $u_n - \epsilon'$ et la suite constante égale à $u_n + \epsilon'$, d'où dans \mathbb{R} :

$$|\alpha - u_n| < \epsilon' \leq \epsilon$$

Mais ceci est vrai pour tout $n \geq n_0$, c'est-à-dire que dans \mathbb{R} , la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α . □

Théorème \mathbb{R} est complet.

Démonstration : Soit une suite de Cauchy $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathbb{R} . Soit $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de rationnels tendant vers 0. Par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , on peut trouver une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels vérifiant :

$$\forall n, \quad |u_n - \alpha_n| \leq \epsilon_n$$

(Cette suite étant obtenue en prenant, pour chaque indice n , un rationnel u_n dans l'intervalle $] \alpha_n - \epsilon_n ; \alpha_n + \epsilon_n [$.)

Par l'inégalité triangulaire (dans \mathbb{R}), on a pour deux entiers n et p :

$$|u_n - u_p| \leq |u_n - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha_p| + |\alpha_p - u_p| \leq \epsilon_n + \epsilon_p + |\alpha_n - \alpha_p|$$

On en déduit aisément que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est elle aussi de Cauchy, et qu'elle converge vers le réel α qu'elle représente (lemme précédent).

Comme par construction $u_n - \alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, il vient :

$$\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha$$

et la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge bien dans \mathbb{R} . □

N.B. L'ensemble \mathbb{R} , construit par les suites de Cauchy de rationnels, est appelé *complété de Cauchy* de \mathbb{Q} . Cette construction est possible à partir de n'importe quel groupe archimédien.

Enfin, il existe d'autres constructions de \mathbb{R} , notamment par les coupures (construction du mathématicien allemand Dedekind). Cette construction, dans

les grandes lignes, consiste à définir un réel comme la borne supérieure d'un ensemble majoré de rationnels. Plus laborieuse pour pas mal de choses, notamment la définition des opérations, et bien sûr la complétude, elle a néanmoins l'avantage de fournir sans trop d'effort la propriété de la borne supérieure. Voyons comment l'obtenir par la construction de Cauchy :

Théorème *Tout sous-ensemble de \mathbb{R} non vide et majoré possède une borne supérieure (un majorant, qui est le plus petit des majorants de la partie).*

Démonstration : Soit donc A une partie de \mathbb{R} , majorée. Si A possède un plus grand élément m , il n'y a rien à démontrer : tout majorant de A doit majorer m , et donc m est le plus petit des majorants de A .

On se place donc dans le cas contraire, où la partie A ne possède pas de plus grand élément. En particulier, quel que soit $a \in A$, on peut trouver un autre élément $b \in A$ strictement supérieur. Nous allons construire la borne supérieure de A comme la limite de deux suites adjacentes, dont il faudra auparavant montrer qu'elles sont de Cauchy. Il s'agira d'une suite croissante d'éléments de A et d'une suite décroissante de majorants de A .

Soit donc u_0 un élément quelconque de A , et m_0 un majorant (quelconque également). On construit par récurrence les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante.

Supposons u_0, \dots, u_n construits, ainsi que m_0, \dots, m_n .

- Si $\frac{u_n + m_n}{2}$ est encore un majorant de A , on pose $m_{n+1} = \frac{u_n + m_n}{2}$, et l'on choisit dans A l'élément $u_{n+1} > u_n$ de façon arbitraire. C'est possible puisque A n'a pas de plus grand élément.
- Sinon, on peut trouver un élément de A strictement supérieur à $\frac{u_n + m_n}{2}$, qui sera u_{n+1} , et l'on pose $m_{n+1} = m_n$.

Montrons que ces deux suites sont bien des suites de Cauchy. Par construction, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, et la suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Montrons par récurrence sur n la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \quad 0 < m_n - u_n < \frac{m_0 - u_0}{2^n}$$

- $\mathcal{P}(1)$ est vraie. En effet lors de la première étape de construction, deux cas se présentent.

Dans le premier cas, $m_1 = \frac{u_0 + m_0}{2}$ est un majorant de A , donc

$$u_0 < u_1 < \frac{u_0 + m_0}{2}$$

et donc $0 < m_1 - u_1 < m_1 - u_0 = \frac{m_0 - u_0}{2}$

Dans le second cas, on a $u_1 > \frac{u_0 + m_0}{2}$ et $m_1 = m_0$, donc

$$0 < m_1 - u_1 < m_0 - \frac{u_0 + m_0}{2} = \frac{m_0 - u_0}{2}$$

- $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$: Supposons en effet $0 < m_n - u_n < \frac{m_0 - u_0}{2^n}$.

Par le même raisonnement que pour la première étape, on obtient en distinguant les deux cas $0 < m_{n+1} - u_{n+1} < \frac{m_n - u_n}{2}$. En appliquant

l'hypothèse de récurrence, on a donc pour $m_{n+1} - u_{n+1}$ l'encadrement voulu, à savoir :

$$0 < m_{n+1} - u_{n+1} < \frac{m_0 - u_0}{2^{n+1}}$$

– On conclue par récurrence que la propriété est vraie pour tout n .

Soit maintenant ϵ un réel strictement positif. Comme nous savons déjà que \mathbb{R} est archimédien, il existe un entier p tel que $p \times \epsilon \geq m_0 - u_0$. Soit alors n_0 un entier tel que $2^{n_0} \geq p$. Pour $n \geq n_0$, on a alors

$$2^n \times \epsilon \geq p \times \epsilon \geq m_0 - u_0$$

donc $\frac{m_0 - u_0}{2^n} \leq \epsilon$ et donc $0 < m_n - u_n < \epsilon$

Soient maintenant n et p deux entiers supérieurs ou égaux à n_0 . On suppose par exemple $n \leq p$. On a alors les inégalités :

$$u_n \leq u_p < m_p \leq m_n$$

donc $|u_n - u_p| < |u_n - m_n| < \epsilon$

et $|m_n - m_p| < |u_n - m_n| < \epsilon$

Ceci montre que les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites de Cauchy.

D'après le théorème précédent, elles convergent donc. Comme de plus la différence $m_n - u_n$ tend vers 0, elles ont même limite. Soit α cette limite commune. Nous allons montrer que α est la borne supérieure recherchée.

Pour ceci, nous allons avoir besoin de la propriété suivante :

Propriété Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy (dans \mathbb{R}) de limite x , et y un réel tel que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \geq y$$

Alors $x \geq y$

On a bien sûr une propriété analogue en remplaçant \geq par \leq . Nous remettons à plus tard la démonstration de cette propriété, pour pouvoir terminer celle de notre théorème.

– α est un majorant de A . En effet, si l'on considère un élément x de A , la suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a tous ses termes plus grands que x . D'après la propriété précédente, il en va donc de même pour sa limite α , qui majore donc x , et donc la partie A dans son ensemble.

– α est le plus petit majorant possible. Soit en effet $y < \alpha$. Supposons que le réel y est encore un majorant de A . En particulier, c'est aussi un majorant de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donc (propriété) de sa limite α , ce qui est absurde.

Nous avons montré que le réel α est bien le plus petit des majorants, c'est-à-dire la borne supérieure. \square

Démonstration de la propriété : Soit donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy (dans \mathbb{R}) de limite x , et y un réel tel que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \geq y$$

Tout comme pour la démonstration de la complétude de \mathbb{R} , nous allons revenir par densité à des suites de rationnels. Soit $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de rationnels qui tend vers 0. On commence par construire une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels telle que pour tout n , on ait $x_n < a_n < x_n + \epsilon_n$.

Ensuite, on construit une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels pris respectivement, par densité de \mathbb{Q} , dans les intervalles $]y; \min(y + \epsilon_n, a_n)[$.

Les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendent respectivement vers x et y . Or par construction, on a pour tout n , $b_n < a_n$, donc la suite $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ représente un réel positif, c'est-à-dire que $x - y \geq 0$, et donc $x \geq y$.

□

N.B. Muni de cette propriété, il est assez facile d'exhiber des réels qui ne sont pas rationnels (plus que pour la suite $\sum_{k=1}^n 1/k!$).

EXEMPLE : Il existe un réel de carré 2. Ce réel n'est pas un rationnel.

En effet, l'ensemble des réels de carré plus petit que 2 est non vide (0 est dedans!) et majoré, par exemple par 2 : la relation d'ordre étant compatible avec la multiplication sur \mathbb{R}_+ , on a $x \geq 2 \implies x^2 \geq 4 > 2$. Tout réel positif de carré plus grand que 2 est un majorant de notre partie, par le même argument.

La borne supérieure α de cet ensemble est alors un réel dont le carré est 2 :
 - si $\alpha^2 > 2$, on pose $\epsilon = (\alpha^2 - 2) / 5$, et l'on a

$$(\alpha - \epsilon)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\epsilon + \epsilon^2 > \alpha^2 - 2\alpha\epsilon$$

Or on sait que $\alpha \leq 2$, donc $2\alpha\epsilon \leq 4\epsilon$. Il vient la minoration :

$$(\alpha - \epsilon)^2 \geq \alpha^2 - 4(\alpha^2 - 2) / 5 > 2$$

Donc $\alpha - \epsilon$ est encore un majorant, ce qui contredit la définition de α .

- Si au contraire $\alpha^2 < 2$, on pose cette fois $\epsilon = (2 - \alpha^2) / 5$, et alors

$$(\alpha + \epsilon)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\epsilon + \epsilon^2$$

Comme $0 \leq \alpha^2 < 2$, on a $2 - \alpha^2 \leq 2$, et donc $\epsilon < 1$, d'où l'on tire $\epsilon^2 < \epsilon$. Et comme bien sûr $\alpha \leq 2$, on a toujours $2\alpha\epsilon \leq 4\epsilon$.

Il vient $(\alpha + \epsilon)^2 < \alpha^2 + 5\epsilon = 2$

Le réel $\alpha + \epsilon$ construit est donc de carré strictement inférieur à 2, ce qui contredit le fait que α majore l'ensemble des réels de carré inférieur à 2.

Le réel α construit vérifie donc bien $\alpha^2 = 2$.

Or, on ne peut construire de rationnel de carré 2 : si $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, en supposant p et q premiers entre eux (représentant irréductible), on obtient $p^2 = 2q^2$, donc successivement :

- 2 divise p^2 , donc 2 divise p (un nombre impair a un carré impair).
- p s'écrit donc $2p'$, donc $p^2 = 4p'^2$.
- En remplaçant dans l'égalité d'origine, il vient $2p'^2 = q^2$.
- Donc 2 divise q^2 , donc 2 divise q .
- p et q ont 2 comme diviseur commun, ce qui contredit le fait qu'ils sont premiers entre eux.