Polygones réguliers

Énoncé

Soit E un ensemble de $n \geqslant 3$ points du plan. On suppose que si $A \neq B \in E$, la médiatrice de $[AB]$ est un axe de symétrie de E. Montrer que E est un polygone régulier.

Corrigé

Soit G le centre de gravité de E. Si Δ est un axe de symétrie de E, la réflexion par rapport à Δ permute les différents points de E. En particulier, elle laisse invariante le centre de gravité [1] G, c'est-à-dire que $G \in \Delta$. C'est un résultat général : **le centre de gravité d'une figure [2] appartient à tous ses axes de symétrie.** [3]

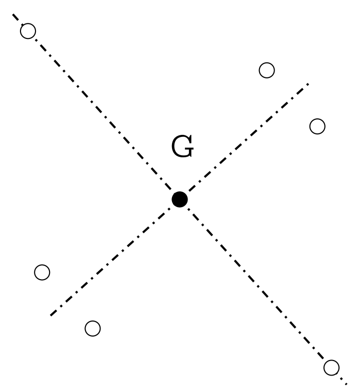

FIGURE 1 – Le centre de gravité d'une figure est sur tous ses axes de symétrie

Ici, les médiatrices de tous les segments $[AB]$ sont des axes de symétrie, donc G appartient à toutes ces médiatrices. En particulier, si A_0 est un point de E, on a, pour tout $A \neq A_0 \in E$, que G est sur la médiatrice de $[AA_0]$ et donc que $AG = A_0G$. En particulier, **tous les points de E sont sur un même cercle centré en G.**

Nommons maintenant les points de E sous la forme $A_1, A_2, \ldots, A_n$, dans l'ordre dans lequel ils sont rangés sur le cercle.

1. C'est à peu près évident en coordonnées : les coordonnées de G sont les moyennes des coordonnées des points de E. Puisque la réflexion permute les points de E, elle permutera les coordonnées, mais cela ne changera pas leur moyenne : la moyenne d'une liste de nombres ne dépend pas de l'ordre, donc l'isobarycentre d'une liste de points non plus !
2. s'il existe, mais c'est automatique pour une figure finie
3. s'il y en a...

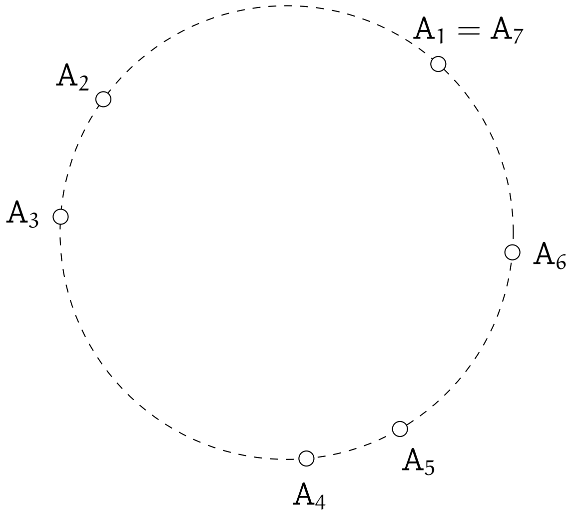

FIGURE 2 – Tous les points de E sont cocycliques

Si $1 \leqslant i \leqslant n$, la réflexion σ par rapport à la médiatrice de $[A_iA_{i+2}]$ (on considère les indices modulo n : $A_{n+1} = A_1$, $A_{n+2} = A_2$...) échange A_i et A_{i+2}, mais elle n'échange pas les deux arcs de cercle joignant A_i à A_{i+2} (celui qui contient A_{i+1} et celui qui contient les autres A_j). En particulier, cette réflexion fixe forcément A_{i+1}. On en déduit que $A_iA_{i+1} = A_{i+1}A_{i+2}$.

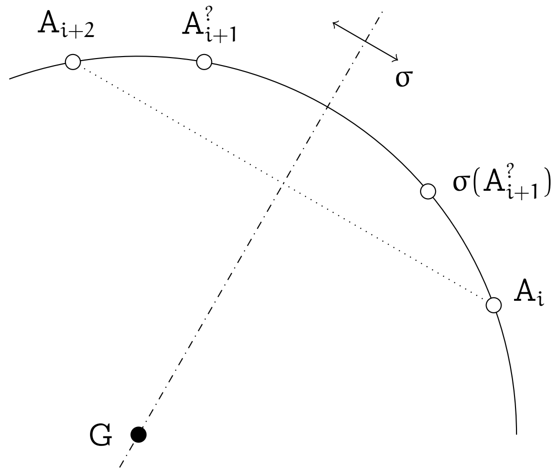

FIGURE 3 – Une situation impossible

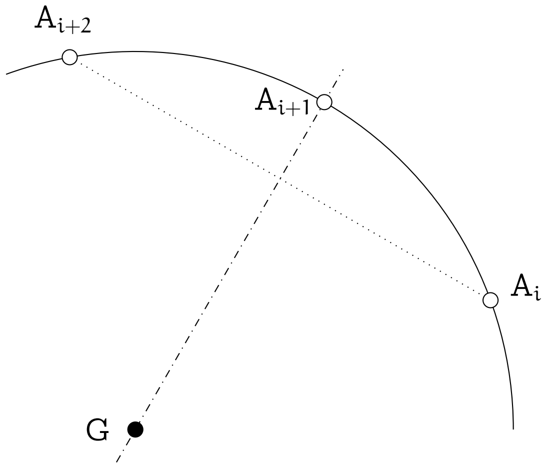

FIGURE 4 – $A_iA_{i+1} = A_{i+1}A_{i+2}$

Comme cela est valable pour tout i, le polygone $A_1A_2 \cdots A_n$ est bien régulier.

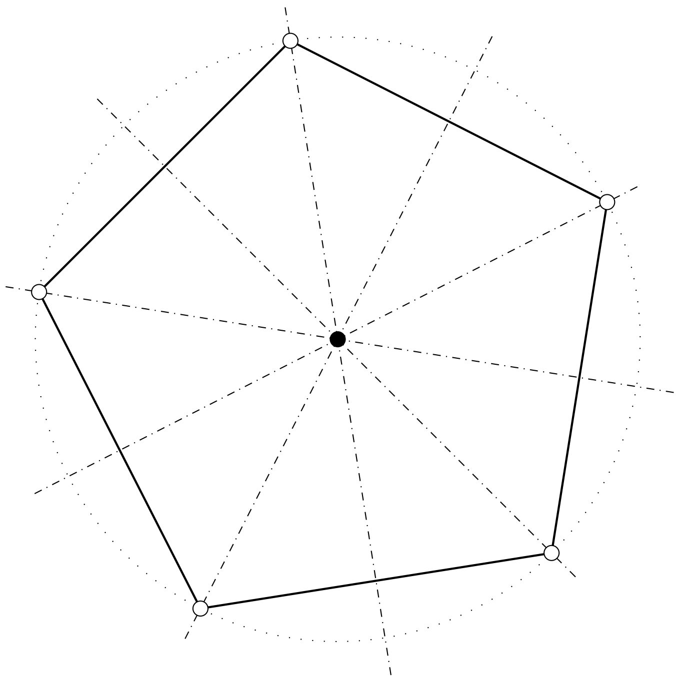

FIGURE 5 – E est un polygone régulier