
Deviner le polynôme

Question

Alice et Bob jouent à un jeu : Bob pense à un polynôme P à coefficients entiers positifs et Alice doit le deviner. À chaque tour, Alice demande la valeur de P en un nombre entier, et Bob la lui donne. En combien de tours Alice pourra-t-elle deviner P ?

(Précisons qu'Alice sait que les coefficients de P sont des entiers positifs, mais qu'elle n'en sait pas plus. En particulier, elle n'a aucune information sur son degré.)

Réponse

Alice peut déterminer le polynôme avec seulement deux questions.

Pour cela, remarquons que si $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, avec $a_k \in \mathbb{N}$ et qu'un entier n est strictement plus grand que tous les a_k , la donnée de $P(n)$ détermine le polynôme P :

$$P(n) = \sum_{k=0}^d a_k n^k$$

et les a_k sont simplement les « chiffres » de l'écriture de $P(n)$ en base n .

Ainsi, Alice peut poser la première question « Combien vaut $P(1)$? » La réponse de Bob est $P(1) = \sum_{k=0}^d a_k$, qui est évidemment plus grand (au sens large) que les coefficients a_k .

Alice n'a alors plus qu'à prendre n'importe quel entier $n > P(1)$ et à demander la valeur de $P(n)$.