Treize nombres réels

Question

Montrer que parmi tout ensemble de treize nombres réels distincts, on peut en trouver deux (a et b) tels que $\dfrac{a-b}{1+ab} \leqslant 2-\sqrt{3}$.

Réponse

Il s'agit ici de reconnaître la formule de différence pour la tangente :

$$\forall x, y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x \tan y}.$$

Comme la fonction $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est bijective, on peut écrire les treize nombres de notre ensemble sous la forme $\tan x_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant 13$. Quitte à réordonner les (x_i), on a donc

$$-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \cdots < x_{12} < x_{13} < \frac{\pi}{2}.$$

Puisque les douze intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ (pour $1 \leqslant i \leqslant 12$) sont disjoints, la somme de leurs longueurs est inférieure à π. On peut donc trouver $1 \leqslant i \leqslant 12$ tel que $x_{i+1} - x_i \leqslant \frac{\pi}{12}$.

Si on pose $b = \tan x_i$ et $a = \tan x_{i+1}$ (qui sont des éléments de l'ensemble de départ), la croissance de la fonction tangente entraîne que

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} = \frac{\tan x_{i+1} - \tan x_i}{1+\tan(x_i)\tan(x_{i+1})} = \tan(x_{i+1}-x_i) < \tan\frac{\pi}{12}.$$

Il ne reste donc plus qu'à vérifier que $\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$ pour conclure.

La formule du doublement de l'angle $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ montre que $2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui entraîne $\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$. On a alors $\sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

Tout cela entraîne

$$\tan^2\frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \left(2-\sqrt{3}\right)^2.$$

et donc, puisque $\tan\frac{\pi}{12} > 0$,

$$\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}.$$