
Tapis roulant

Question

On veut traverser le plus vite possible un long couloir, dont un tronçon est équipé d'un tapis roulant. Votre lacet est défait : vaut-il mieux le renouer sur le tapis roulant, hors du tapis roulant, ou est-ce sans importance ?

Réponse

L'argument vague « de toute façon, refaire le nœud prendra le même temps dans un cas comme dans l'autre, donc ça n'a pas d'importance » est fallacieux. Montrons-le d'abord par le calcul.

Appelons v_0 votre vitesse usuelle (hors du tapis), v_{tapis} la vitesse du tapis roulant, d_{tapis} la distance à parcourir sur le tapis, d_0 la distance à parcourir en dehors et t le temps nécessaire pour renouer votre lacet. Calculons le temps nécessaire à la traversée du couloir dans les deux cas.

Si vous décidez de lacer votre chaussure hors du tapis roulant, il vous faudra marcher pendant un temps égal à $\frac{d_0}{v_0}$ hors du tapis et $\frac{d_{\text{tapis}}}{v_0 + v_{\text{tapis}}}$ dessus, à quoi il faut ajouter le temps nécessaire pour refaire le nœud. Cela représente un temps total de

$$T_1 = \frac{d_0}{v_0} + \frac{d_{\text{tapis}}}{v_0 + v_{\text{tapis}}} + t.$$

Si vous décidez de lacer votre chaussure sur le tapis roulant, vous passerez moins de temps à marcher sur ledit tapis¹. En effet, pendant le temps nécessaire à refaire le nœud, le tapis aura avancé de tv_{tapis} , et vous avec. La distance que vous parcourrez en marchant sur le tapis sera donc seulement de $d_{\text{tapis}} - tv_{\text{tapis}}$, et le temps total de parcours de

$$T_2 = \frac{d_0}{v_0} + \frac{d_{\text{tapis}} - tv_{\text{tapis}}}{v_0 + v_{\text{tapis}}} + t.$$

On voit donc bien que $T_1 > T_2$. Plus précisément,

$$T_1 - T_2 = \frac{v_{\text{tapis}}}{v_0 + v_{\text{tapis}}} t.$$

On voit donc que le gain est d'autant plus important que la vitesse du tapis est importante par rapport à la vôtre.

Il est en fait très facile de se convaincre de ce résultat par une petite expérience de pensée. Imaginez qu'Alice et Bob fassent simultanément les deux choix possibles (en supposant évidemment qu'ils marchent à la même vitesse et lacent leur chaussure avec la même célérité).

1. C'est la raison qui rend l'argument vague ci-dessus faux : votre choix est certes sans effet sur le temps passé à faire votre lacet, mais il a un effet sur la distance que vous allez parcourir à pied.

Pour fixer les idées, supposons que le tapis soit quelque part au milieu du couloir, qu'Alice refasse son nœud juste après être montée dessus, et Bob juste avant.

Avant le tapis, Alice et Bob sont parfaitement synchronisés. Ensuite, pendant que les deux nouent leur lacet, Alice avance d'une certaine distance, grâce au tapis. Ils finissent en même temps, et Alice est maintenant devant Bob. Comme ils marchent à la même vitesse, Bob ne peut évidemment pas rattraper Alice.

Remarque. Cette petite énigme provient du blog *What's new?* du mathématicien australien Terence Tao (médaille Fields 2006).