Un jeu polynomial

Question

Alice et Bob jouent à un jeu un peu étrange : tout d'abord, Alice choisit trois réels non nuls. Ensuite, Bob insère ces trois nombres réels, dans l'ordre qu'il souhaite, dans l'expression $\square X^2 + \square X + \square$. Il obtient ainsi un polynôme P de degré 2. Le jeu est alors terminé, et on dit qu'Alice gagne si le polynôme P a deux racines distinctes dans $\mathbb{Q}$, et que Bob gagne sinon.

Par exemple, si Alice choisit les réels 1, -1 et -1, Bob peut former le polynôme $X^2 - X - 1$, ce qui lui fait gagner la partie, car les racines de ce polynôme, $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ sont distinctes, mais pas rationnelles.

La question est : lequel de ces deux joueurs possède une stratégie gagnante (autrement dit, lequel est sûr de gagner, si du moins il joue parfaitement) ?

Réponse

Il y a plusieurs façons de voir qu'**Alice a une stratégie gagnante**, plus ou moins élégantes. La plus simple est probablement la suivante : Alice peut choisir trois nombres rationnels p_1, p_2 et p_3 non nuls et distincts tels que $p_1 + p_2 + p_3 = 0$.

En effet, puisque le polynôme $P = aX^2 + bX + c$ vérifie $P(1) = a + b + c$, la stratégie d'Alice garantit que, quel que soit l'ordre dans lequel Bob insère les nombres p_1, p_2 et p_3 (et donc quel que soit le polynôme P qu'il construit ainsi), on aura $P(1) = p_1 + p_2 + p_3 = 0$, ce qui garantit déjà une solution rationnelle : le nombre 1.

Par ailleurs, le produit des racines du polynôme $aX^2 + bX + c$ vaut toujours [1] c/a. Comme P a déjà la racine 1, ce produit est égal à la deuxième racine : les racines de P sont 1 et c/a. Puisqu'Alice a choisi trois nombres rationnels distincts, on voit que c/a est bien un rationnel différent de 1, ce qui montre que, quel que soit le coup de Bob, la victoire d'Alice est assurée.

1. Un polynôme du second degré a un coefficient dominant $\lambda \neq 0$ et deux racines r_1 et r_2, éventuellement complexes ou confondues, et peut donc s'écrire

$$\lambda(X - r_1)(X - r_2) = \lambda(X^2 - (r_1 + r_2) + r_1 r_2) = \lambda X^2 - \lambda(r_1 + r_2)X + \lambda r_1 r_2.$$

On voit donc directement que le produit des racines de $aX^2 + bX + c$ est c/a et que leur somme est $-b/a$.