Thé ou café ?

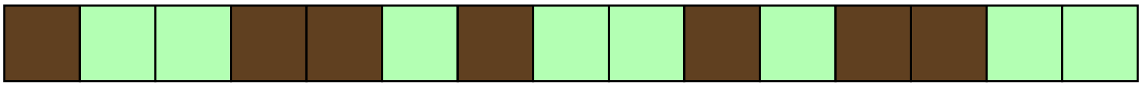
Question

Ana aime le hasard et déteste la monotonie. Tous les matins, elle tire à pile ou face sa boisson pour le petit déjeûner : thé ou café. Elle souhaite ainsi éviter de boire la même chose trois jours de suite. Au bout de n jours, quelle est la probabilité que sa règle de non-monotonie ait été respectée ?

Réponse

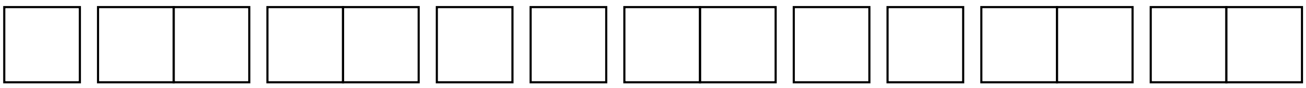
Au bout de n jours, il y a 2^n « historiques » possibles pour les petits déjeûner d'Ana. On doit se demander combien d'entre eux sont « favorables », c'est-à-dire ne présentent jamais la même boisson trois jours de suite.

Imaginons qu'Ana enregistre sur une (longue) file de carreaux ses boissons, en coloriant le n-ième carreau en vert si elle a bu du thé, en marron si c'était du café. Pour que l'historique soit favorable, il faut que son historique ressemble à



c'est-à-dire qu'il s'obtienne en posant à la suite des « carreaux » et ainsi que des « dominos » et , en alternant les couleurs.

Or, pour obtenir une telle frise, le choix des couleurs est en fait très limité : une fois que l'on a choisi la « forme » des pièces, par exemple



comme dans notre exemple, il n'y a que deux choix possibles de couleurs : on peut commencer par le vert ou le marron, puis la règle d'alternance force toutes les autres couleurs.

Autrement dit, le nombre d'historiques vérifiant la règle de non-monotonie est exactement le double du nombre F_n de manières de remplir un rectangle $1 \times n$ en utilisant des carreaux 1×1 et des dominos 1×2.

Or, cette définition combinatoire est une des définitions possibles[1] des nombres de Fibonacci[2] ! En effet, il est facile de voir que le nombre de tels remplissages vérifie la relation de récurrence $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$: pour remplir un rectangle de longueur $n+2$, on peut soit

1. On présente souvent cette définition comme : le nombre de Fibonacci est le nombre F_n de manières de monter n marches d'escalier en choisissant à chaque pas de sauter ou ne pas sauter une marche.

2. Noter que deux conventions existent pour la numérotation des nombres de Fibonacci : celle qui est adaptée à notre définition est celle pour laquelle $F_0 = F_1 = 1$.

commencer par un carreau (auquel cas il restera un rectangle de longueur $n+1$ à remplir, et donc F_{n+1} possibilités), soit par un domino (auquel cas il restera un rectangle de longueur n et donc F_n possibilités).

La probabilité qu'Ana échappe à la monotonie est donc de

$$P_n = \frac{2F_n}{2^n} = \frac{F_n}{2^{n-1}}.$$

Remarque : D'après la célèbre formule de Binet

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right],$$

la probabilité que l'on vient de donner vaut à peu près $1,45 \times (0,8)^n$, et qu'elle tend donc très vite[3] vers 0.

3. Ana a plus de chances de gagner au Loto quatre fois de suite que d'échapper à la monotonie pendant un an.