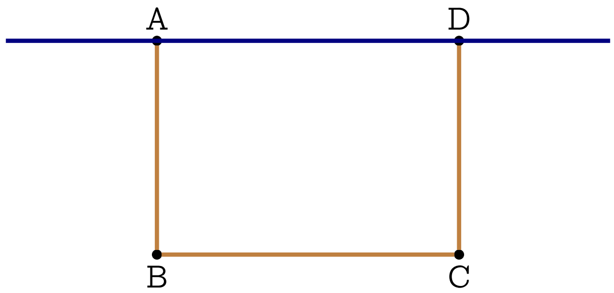
Le problème de Didon

Question

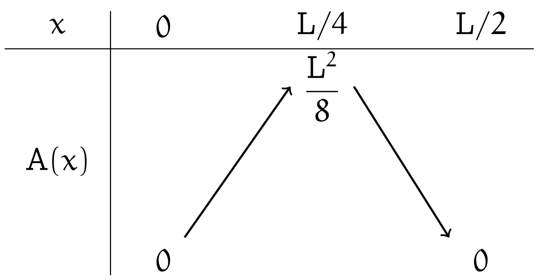
Soit Δ une droite du plan et L une longueur fixée. Parmi tous les rectangles $ABCD$ tels que $A, D \in \Delta$ et $AB + BC + CD = L$, lesquels sont d'aire maximale ?



Réponse

Pour répondre à cette question, donnons des noms aux différents paramètres.

Si nous appelons x la longueur $AB = CD$ (qui peut a priori varier entre 0 et $L/2$), la longueur BC vaut $L - 2x$ et l'aire du rectangle est donc $A(x) = x(L - 2x) = -2x^2 + Lx$. Il est alors aisé de déterminer le sens de variation de ce polynôme du second degré : comme le coefficient dominant est négatif, le polynôme est croissant puis décroissant, et son maximum est atteint au milieu de ses deux racines, qui sont visiblement 0 et $L/2$.



Le maximum de $A(x)$ est donc atteint quand $x = L/2$ (et vaut $\frac{L^2}{8}$). Ainsi, les rectangles résolvant le problème de Didon sont ceux qui sont deux fois plus longs que larges.

Remarquons que l'on peut en fait trouver ce résultat à l'aide de l'*inégalité arithmético-géométrique* : dans sa version la plus simple, celle-ci affirme que si α et β sont deux nombres $\geqslant 0$, *leur moyenne géométrique* $MG(\alpha, \beta) = \sqrt{\alpha\beta}$ est toujours inférieure ou égale à *leur moyenne arithmétique* $MA(\alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Ainsi, on a

$$\text{Aire}(ABCD) = xy = \frac{1}{2}MG(2x, y)^2 \leqslant \frac{1}{2}MA(2x, y)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2x + y}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}L^2.$$

En outre, l'inégalité arithmético-géométrique est une égalité si et seulement si les deux termes α et β sont égaux, ce qui entraîne encore une fois que la seule solution au problème de Didon est celle des rectangles tels que $y = 2x$.