
Multiples de 164

Question

Combien de nombres à 6 chiffres sont multiples de 164 et se terminent par 164 ?

Remarque : cette question est extraite du *Calendrier mathématique 2016* (question du 25 février).

Réponse

Un nombre à 6 chiffres se terminant par 164 est un nombre de la forme $1000 \times n + 164$, où n est un entier compris entre 100 et 999.

Par ailleurs, la décomposition de 164 en facteurs premiers est (de manière appropriée pour la quarante-et-unième question du jeudi)

$$164 = 2^2 \times 41 = 4 \times 41.$$

Déjà, notre nombre est toujours divisible par 4 : on peut remarquer que $1000 \times n + 164 = 4 \times (250 \times n + 41)$ ou bien se souvenir du critère de divisibilité par 4 (un nombre est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé de ses deux derniers chiffres l'est). En particulier, $1000 \times n + 164$ est divisible par 164 si et seulement si $250 \times n + 41$ est divisible par 41 (ce qui est équivalent au fait que 41 divise $250 \times n$).

Puisque 41 est un nombre premier ne divisant pas 250, le lemme d'Euclide s'applique et 41 divise $250 \times n$ si et seulement s'il divise n .

Ainsi, les nombres recherchés sont exactement les nombres de la forme $1000n + 164$, où n est un multiple de 41 compris entre 100 et 999. Les n qui conviennent sont donc

$$3 \times 41 = 123, 4 \times 41 = 164, \dots, 23 \times 41 = 943, 24 \times 41 = 984,$$

qui sont au nombre de 22.

Il y a donc 22 nombres à six chiffres se terminant par 164 qui sont multiples de 164.