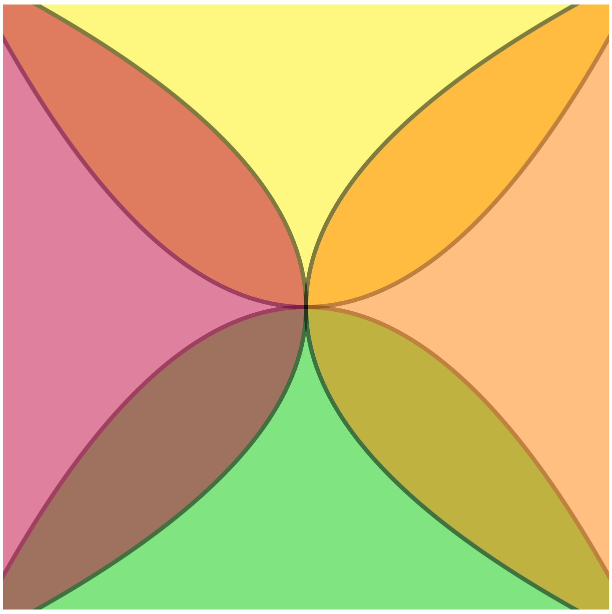
Paraboles

Question

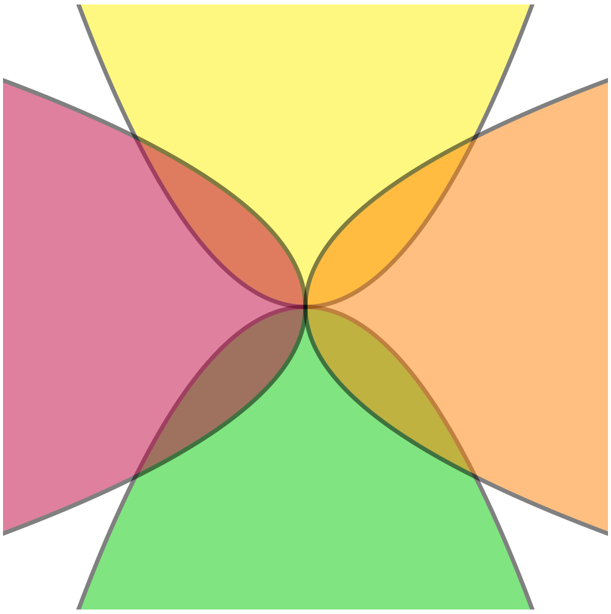
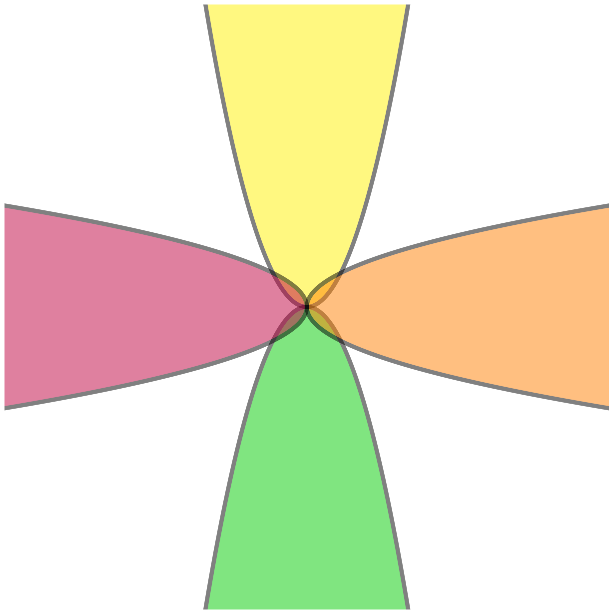
Montrer que l'on ne peut pas recouvrir le plan par un nombre fini d'intérieurs de paraboles.

Réponse

À première vue, le résultat peut paraître surprenant. En effet, on imagine assez bien quatre paraboles recouvrir le plan.



Mais cette image est un leurre, comme on peut s'en apercevoir en dézoomant l'image deux fois, puis dix fois.

Cette dernière image nous donne d'ailleurs la clef du problème : vue de très loin, une parabole a l'air concentrée autour de son axe. C'est ce que nous allons utiliser pour donner une démonstration rigoureuse.

Lemme. L'intersection entre l'intérieur d'une parabole et une droite qui n'est pas parallèle à son axe est bornée.

Preuve. Par symétrie, il suffit de montrer ce résultat pour une parabole bien choisie, par exemple le graphe de la fonction $x \mapsto x^2$. Dans ce cas, l'axe de la parabole est l'axe des ordonnées et une droite non parallèle à celui-ci est le graphe d'une fonction affine $x \mapsto mx+p$. Or, le tableau des signes du binôme x^2-mx+p montre bien que $mx+p$ ne peut être supérieur à x^2 qu'entre les deux racines de $x^2 - mx + p$, si celles-ci existent. En particulier, pour $|x|$ assez grand, $x^2 > mx+p$, ce qui montre que le point $(x, mx+p)$ n'appartient pas à l'intérieur de la parabole. L'intersection entre la parabole est la droite est donc bornée (suivant le signe du discriminant du binôme cité plus haut, cette intersection peut-être vide, un point ou un segment).

Le lemme conclut alors : si un nombre fini de paraboles recouvrait le plan, celles-ci recouvriraient en particulier toutes les droites du plan. Mais, si l'on choisit une droite qui n'est parallèle à aucun des axes, on a alors un nombre fini d'ensembles bornés qui recouvre une droite, ce qui est absurde.