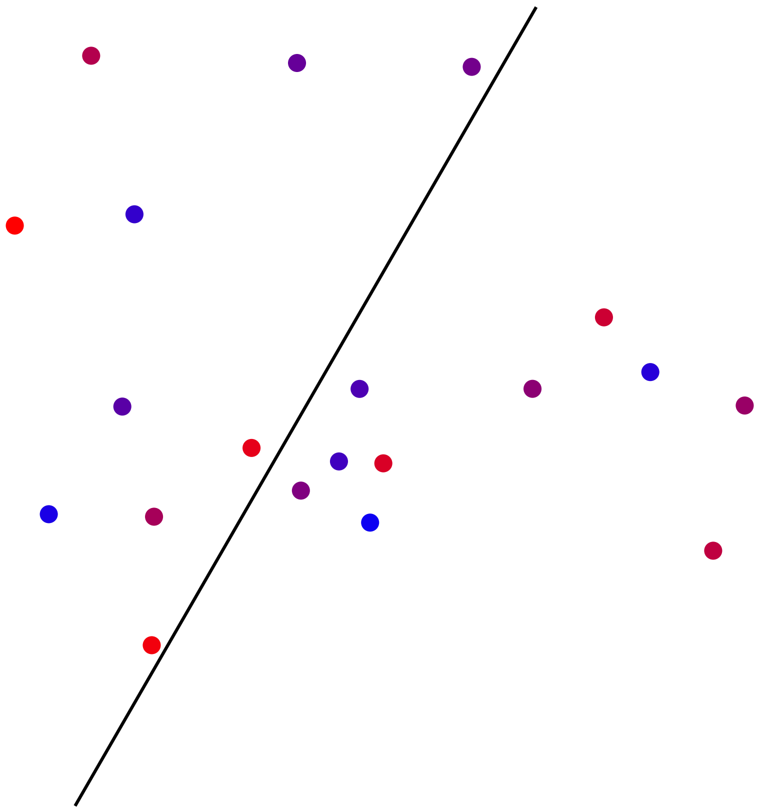
Séparer 2016 points

Logo



Question

On place 2016 points dans le plan. Montrer que l'on peut trouver une droite qui sépare le plan en deux régions contenant 1008 points chacune.

Réponse

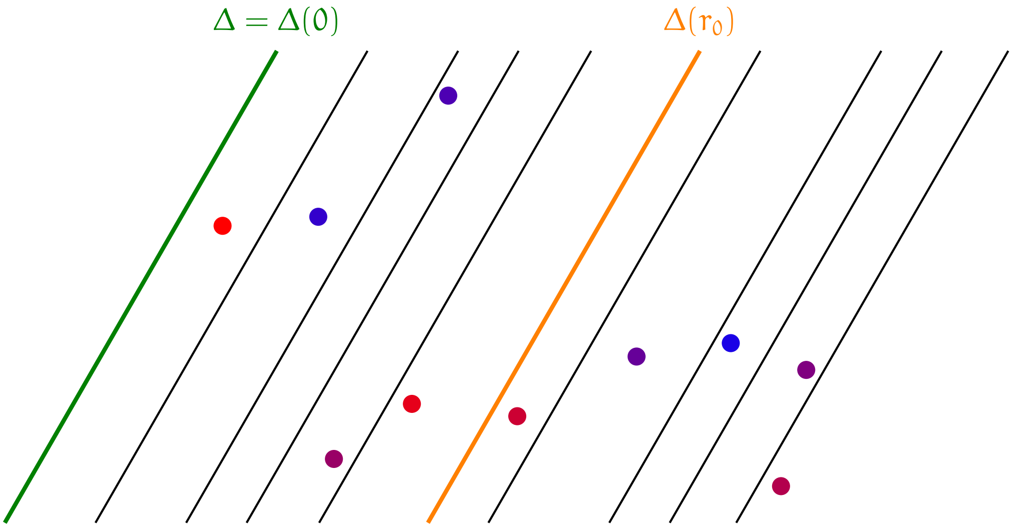
Il y a plusieurs manières de répondre à cette question, l'important étant de ne pas rentrer dans les détails géométriques de la configuration.

Choisissons une droite Δ ne contenant aucun des 2016 points donnés $P_1, P_2, \ldots, P_{2016}$ et telle que la parallèle D_i à Δ passant par P_i ne rencontre jamais d'autre point P_j. Cela est possible car il suffit de prendre Δ qui ne soit parallèle à aucune des droites $(P_i P_j)$, qui sont en nombre fini (il y en a au plus $\binom{2016}{2} = 2\,031\,120$). Quitte à translater Δ, on peut même supposer que tous les (P_i) sont du même côté de Δ (on appellera ce côté le côté intéressant).

Maintenant, pour chaque nombre réel $r \geqslant 0$, considérons la droite $\Delta(r)$, parallèle à Δ, qui est du côté intéressant et telle que la distance entre $\Delta(r)$ et Δ soit exactement r (en particulier, $\Delta = \Delta(0)$).

D'après la propriété de Δ, les $\Delta(r)$ ne contiennent jamais plus d'un point P_i. Ainsi, lorsque r augmente, le nombre $N(r)$ de points compris strictement entre Δ et $\Delta(r)$ ne croît que d'une unité à chaque fois. Puisqu'il sera égal à 2016 pour r assez grand, il devra bien être égal à 1008 pour un certain r_0, et la droite $\Delta(r_0)$ répond à la question.

Voici une illustration de cette stratégie avec 10 points.



(Remarquons que l'on peut également faire une telle preuve « par balayage » en choisissant un point O tel que O, P_i et P_j ne soient jamais alignés et en considérant les différentes droites passant par O).