
Tournoi des Six Nations

Question

Lors du Tournoi des Six Nations, on dit qu'une équipe réalise un *Grand Chelem* si elle bat toutes les autres équipes. Pour cette question, on dira qu'une équipe A réalise un *Petit Chelem* si, à chaque fois que l'on considère une autre équipe B, alors A a battu B ou A a battu une équipe qui a battu B.

Par exemple, lors de l'édition 2015 du Tournoi, les Gallois n'ont pas réalisé de Grand Chelem, puisqu'ils ont perdu contre les Anglais, mais ils ont réalisé un Petit Chelem, puisqu'ils ont battu toutes les autres équipes, et en particulier les Irlandais, qui ont à leur tour battu les Anglais. (L'Irlande et l'Angleterre ont elles aussi réalisé un Petit Chelem).

Montrer que quand il n'y a pas de match nul, une équipe au moins réalise toujours un Petit Chelem.

On rappelle que lors du Tournoi des Six Nations, chaque équipe affronte toutes les autres exactement une fois.

Réponse

Chaque équipe du Tournoi aura gagné un certain nombre (entre 0 et 5) de victoires. Considérons une équipe A qui a remporté un nombre maximal de victoires et montrons que A a réalisé un Petit Chelem (cela explique en particulier pourquoi lors du Tournoi 2015, l'Angleterre, l'Irlande et le Pays de Galles, qui avaient tous les trois remporté quatre de leurs cinq matchs, avaient tous les trois réalisé un Petit Chelem).

Pour que A n'ait pas réalisé de Petit Chelem, il faudrait qu'une certaine équipe, appelons-la B, ait battu A et qu'il n'existe pas d'équipe ayant perdu contre A et gagné contre B. Autrement dit, B devrait avoir battu A et toutes les équipes que A a battues. Cela entraîne immédiatement que B a eu strictement plus de victoires que A, ce qui est une contradiction.

Remarque. Comme on le voit dans l'exemple du Tournoi 2015, cette notion de Petit Chelem n'est pas un très bon moyen de désigner un vainqueur pour un tournoi. En fait, elle possède un assez grand nombre de propriétés étonnantes, comme par exemple :

- Sauf dans les cas où une équipe a réalisé un Grand Chelem, au moins trois équipes réalisent toujours un Petit Chelem.
- Quand le nombre d'équipes d'un tournoi devient grand, si l'on suppose que le résultat de chaque match est tiré au sort, la probabilité que toutes les équipes réalisent un Petit Chelem tend vers 1.

Pour en apprendre plus sur cette étrange notion (qui provient historiquement de l'étude des relations de domination dans les groupes de poules), on recommande l'excellent article *The King Chicken Theorem* de Stephen B. Maurer.