B A C C A L A U R É A T   G É N É R A L

SESSION 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures   Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES – Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures   Coefficient : 4

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1 à 7.

Exercice 1 (4 points) : commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Une justification est attendue.

Affirmation A

Un objet subit trois augmentations successives de 10 %. Une baisse de 25 % suffit à ramener le prix de cet objet en dessous de son prix initial.

Affirmation B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 passe par le point de coordonnées (2;3).

Affirmation C

La valeur exacte de la somme des 12 premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme 4 et de raison $\frac{1}{3}$ est : $6\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{13}\right]$.

Affirmation D

Dans un hôtel, le petit déjeuner n'est servi que jusqu'à 10 heures 15 minutes. Pierre, qui réside dans cet hôtel, se lève entre 9 heures et 11 heures.

On admet que l'heure de lever de Pierre est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[9;11]$. La probabilité que Pierre ne puisse pas prendre son petit-déjeuner est 0,425.

Exercice 2 (5 points) : commun à tous les candidats

Les différentes parties de cet exercice sont indépendantes.

Sauf mention contraire, les résultats seront donnés sous forme approchée à 0,001 près.

Partie A

Une étude portant sur la recharge des véhicules électriques indique que 10 % des recharges sont effectuées sur des bornes publiques. Dans les autres cas, la recharge s'effectue chez des particuliers.

Il existe deux types de recharge : la recharge « standard » et la recharge « accélérée ».

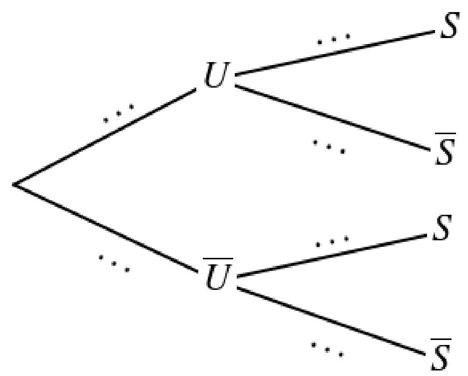
Les recharges « standard » représentent 25 % des recharges effectuées sur des bornes publiques et 95 % des recharges effectuées chez les particuliers.

On choisit au hasard un véhicule électrique qui vient d'être rechargé et on considère les événements suivants :

- U : « la recharge a été effectuée sur une borne publique » ;
- S : « la recharge a été effectuée de façon standard ».

On rappelle que si A et B sont deux évènements, la probabilité de l'événement A est notée $P(A)$ et celle de A sachant B est notée $P_B(A)$. De plus, $\overline{A}$ désigne l'événement contraire de A.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :



2. Justifier que $P(S)=0{,}88$.
3. Sachant que le véhicule choisi a été rechargé de façon standard, calculer la probabilité que la recharge ait été effectuée sur une borne publique.

Partie B

Une société fabriquant des batteries pour véhicules électriques effectue une charge complète de chacune de ses batteries lors de la fabrication. Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de charge de ces batteries, exprimée en heures, par une variable aléatoire T suivant une loi normale de moyenne 6 et d'écart type σ.

1. Sachant qu'environ 95 % des durées de charge sont comprises entre 2,6 h et 9,4 h, justifier que l'on peut choisir $\sigma = 1{,}7$.

2.

a. Calculer $P(T>7)$.

b. Sachant que l'une des batteries mise en charge n'est pas rechargée complètement au bout de 7 heures, quelle est la probabilité qu'elle ne le soit toujours pas au bout de 9 heures ?

Partie C

Le fabriquant de batteries affirme que 80 % de ses batteries peuvent assurer 350 cycles de rechargement complet sans perte significative de puissance.

Une association de consommateurs réalise une enquête sur 57 batteries de cette marque. Parmi celles-ci, seules 40 n'ont pas subi de perte de puissance significative. Cette étude peut-elle remettre en cause l'affirmation du constructeur ? Justifier la réponse.

Exercice 3 (5 points) : candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les différentes parties de cet exercice sont indépendantes.

Au 1er janvier 2018, madame DURAND dispose d'un capital de 16 000 €. Le 1er juillet de chaque année, elle prélève 15 % du capital disponible en prévision de ses vacances estivales.

Partie A

On modélise le montant du capital de madame DURAND au 1er janvier par une suite (u_n). Plus précisément, si n est un entier naturel, u_n désigne le montant du capital de madame DURAND disponible le 1er janvier de l'année $2018+n$.

On a donc $u_0=16\,000$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Exprimer u_n en fonction de n pour tout n entier naturel.
3. **a.** Déterminer la limite de la suite (u_n) en justifiant votre réponse.

   b. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.
4. À l'aide d'un algorithme, madame DURAND souhaite déterminer le nombre d'années à partir duquel son capital devient inférieur ou égal à 2 000 €.

   a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'à la fin de son exécution, la variable N contienne le résultat attendu.

```
U ← ….
N ← 0
Tant que U …..
    N ← …..
    U ← …..
Fin Tant que
```

   b. Quelle est la valeur numérique contenue par la variable N à la fin de l'exécution de cet algorithme ?

Partie B

Cherchant à anticiper la diminution de son capital disponible, madame DURAND décide d'ajouter à son capital disponible 300 € chaque 1er décembre.

On note v_n la valeur du capital le 1er janvier de l'année $2018+n$. On a ainsi $v_0=16000$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1}=0{,}85\times v_n+300$.
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n=v_n-2000$.

   a. Calculer w_0.

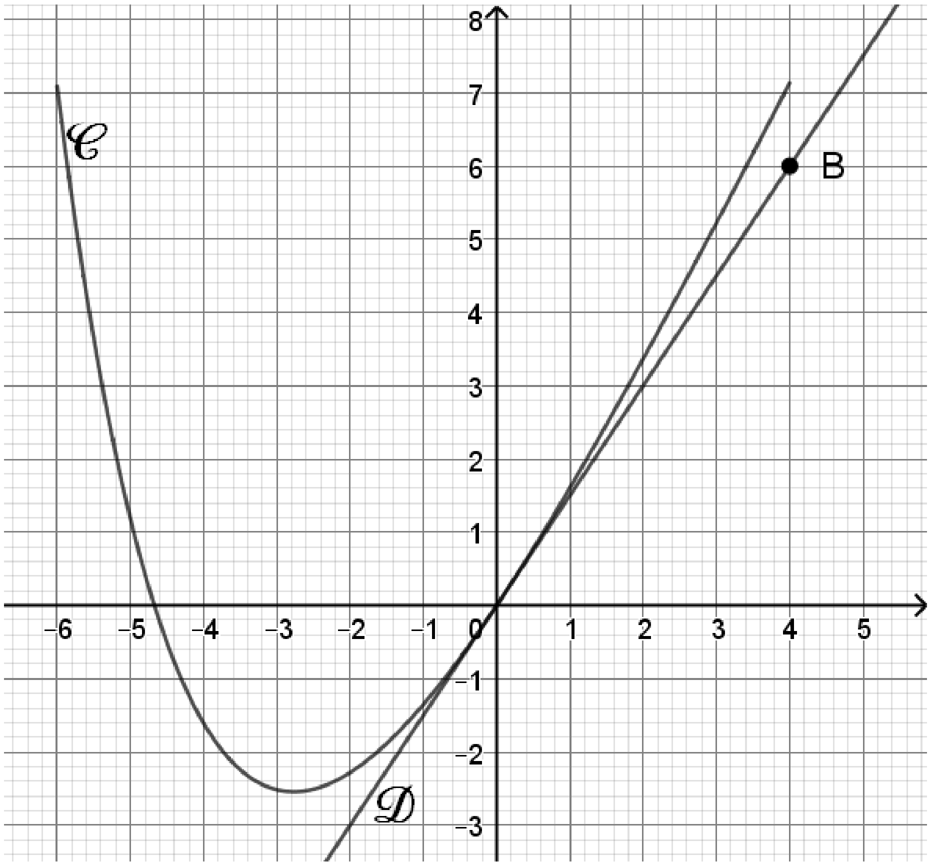
   b. Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,85.

   c. En déduire que, pour tout entier n, $v_n=2\,000+14\,000\times 0{,}85^n$.
3. En s'y prenant ainsi, madame DURAND espère toujours disposer d'un capital supérieur à 2500 €. A-t-elle raison ?

Exercice 4 (6 points) : commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-6;4]$ et dont la courbe $\mathscr{C}$ est représentée ci-dessous. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[-6;4]$.

On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde sur l'intervalle $[-6;4]$.



On a représenté $\mathscr{D}$, la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

La droite $\mathscr{D}$ passe par l'origine du repère et par le point $\mathrm{B}(4;6)$.

1. Avec la précision permise par le graphique :

- **a.** donner la valeur de $f(0)$;
- **b.** donner la valeur de $f'(0)$;
- **c.** conjecturer la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-6;4]$.

2. On admet que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[-6;4]$ et que son expression est $f(x)=2x-1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

- **a.** Calculer $f'(x)$ sur l'intervalle $[-6;4]$.
- **b.** Montrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x)\geqslant 0$ est l'intervalle $[-2\ln(4);4]$.
- **c.** Établir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-6;4]$.

d. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $[-6;4]$.

3. Donner un encadrement au centième près de la solution non nulle de l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $[-6;4]$.

4. Démontrer la conjecture émise dans la question **1.c**.

5. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0;4]$ par $g(x)=x^2-x-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

On admet que la fonction g est dérivable sur $[0;4]$.

a. Montrer que la fonction g est une primitive la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$.

b. En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$. En donner une valeur approchée à 0,01 près