

À propos d'une œuvre de Kupka

Robert Cabane

22 juin 2018

1 Des tableaux fascinants

Une récente exposition-rétrospective au Grand Palais, à Paris, a mis en valeur les œuvres du peintre tchèque František Kupka (né le 23 septembre 1871 à Opočno en Bohême orientale, Tchéquie, et mort à Puteaux, le 24 juin 1957). Le dossier pédagogique de l'exposition est consultable ici : https://www.grandpalais.fr/pdf/Dossier_Pedagogique_KUPKA.pdf.

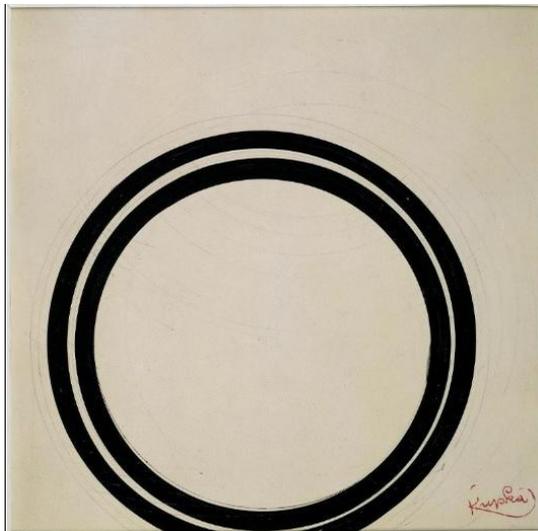
Dans la grande diversité de ses tableaux, intéressons-nous à cette « abstraction noir et blanc », peinte en 1928 et visible au musée d'art moderne du centre Pompidou à Paris.

La simplicité de cette œuvre et la disposition des cercles que nous y voyons ne peuvent qu'intriguer le mathématicien. Comment l'artiste a-t-il disposé les cercles pour produire un tel effet ?

Invitation : les illustrations de cet article sont cliquables ; les liens associés fournissant davantage d'informations sur les œuvres ou figures présentées.



2 Un peu de simplicité



Commençons par une situation plus simple : deux cercles. Heureusement, Kupka y a aussi pensé (ci-contre). . .

Considérons donc deux cercles C et C' du plan, de centres O et O' et de rayons R et R' . On peut déjà tracer la droite $D = (OO')$. Notons aussi $d = d(O, O')$ la distance des deux centres.

Si les deux cercles se coupent, on peut nommer M l'un des deux points communs ; le triangle OMO' ayant des côtés de longueurs R , R' et d , l'inégalité triangulaire impose que chacun de ces côtés soit plus petit (au sens large) que la somme des deux autres, soit encore :

$$d \leq R + R', R \leq d + R' \Leftrightarrow R - R' \leq d, R' \leq d + R \Leftrightarrow R' - R \leq d$$

ce qu'on peut résumer en :

$$(1) |R - R'| \leq d \leq R + R'$$

Cet encadrement ne fait que traduire l'inégalité triangulaire pour la distance d :

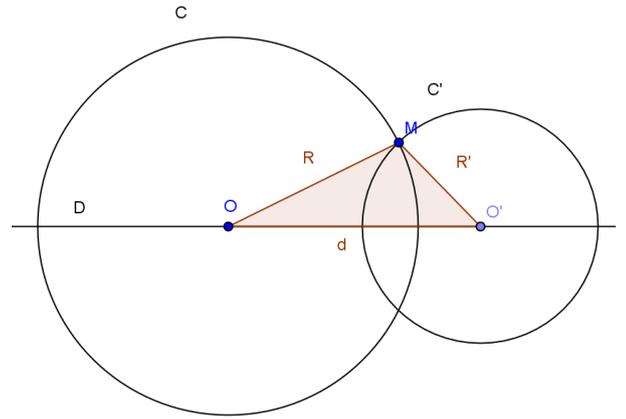
$$|d(O, M) - d(M, O')| \leq d(O, O') \leq d(O, M) + d(M, O')$$

Inversement, supposons que cette inégalité ait lieu, les cercles se coupent-ils? Pour confirmer cela, prenons un repère d'origine O , de sorte que les équations de C et C' s'écrivent :

$$(2) \begin{cases} (C) x^2 + y^2 = R^2 \\ (C') (x - d)^2 + y^2 = R'^2 \end{cases}$$

Un éventuel point M commun, de coordonnées (x, y) , existe si, et seulement si le système (2) est vérifié. De manière équivalente, par soustraction, nous avons :

$$(2') \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ R^2 + d^2 - R'^2 = 2dx \end{cases} \Leftrightarrow (3) \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x = \frac{R^2 + d^2 - R'^2}{2d} \end{cases}$$



Le système (3) revient à l'intersection du cercle C avec une droite perpendiculaire à la droite D , et admet des solutions si, et seulement si la valeur de x permet de déterminer y , soit encore si cette valeur vérifie $x^2 \leq R^2$. On écrit cette condition en détail :

$$(4) \begin{cases} R^2 - R'^2 + d^2 \leq 2dR & \Leftrightarrow (R - d)^2 \leq R'^2 & \Leftrightarrow -R' \leq R - d \leq R' \\ R'^2 - R^2 - d^2 \leq 2dR & \Leftrightarrow R'^2 \leq (R + d)^2 & \Leftrightarrow R' \leq R + d \end{cases}$$

ce qui revient exactement aux conditions (1) vues précédemment.



Dans le cas d'une égalité au niveau du système (1), on peut démontrer que les cercles sont tangents; plus précisément :

- si $R + R' < d$, les cercles sont « extérieurs » l'un à l'autre;
- si $d < |R - R'|$, ils sont « intérieurs » l'un à l'autre.

C'est ce dernier cas qui intéresse Kupka.

3 Deux, trois ... de nombreux cercles

Maintenant que nous savons positionner deux cercles, comment en placer une série et obtenir cet effet « tournoyant »? Un autre tableau de Kupka va nous mettre sur la piste, avec des cercles beaucoup plus rapprochés et « presque » tangents.

En examinant ce tableau d'assez loin, l'œil « voit » une spirale à laquelle les cercles « collent ». C'est ce que nous allons préciser maintenant : comment créer des cercles qui « collent » à une courbe?

Nous considérons donc une courbe plane C , décrite par un point $M(s)$ dépendant d'un paramètre s variant entre 0 et L ¹. Le calcul différentiel va maintenant nous permettre de préciser notre questionnement; dans la suite, nous noterons les vecteurs selon la convention internationale, en gras plutôt qu'avec des flèches. Le premier vecteur à considérer est la « vitesse » $\frac{dM}{ds}$ (qui dirige la tangente à la courbe au point $M(s)$), où le point M apparaît en gras puisque la dérivée d'un point est un vecteur².

Pour simplifier les choses, nous allons supposer que le vecteur vitesse est unitaire; en termes imagés, si une fourmi parcourt notre courbe de cette manière, elle avance à chaque instant en faisant 1 centimètre par seconde (si l'unité de temps est la seconde et l'unité de longueur le centimètre). De ce fait, la longueur du morceau de courbe compris entre les points $M(s_0)$ et $M(s_1)$ sera exactement $s_1 - s_0$ ³.

Notons $\tau = \frac{dM}{ds}$ le vecteur vitesse (tangent), et $\nu(s)$ le vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\tau(s)$.

Pour aider le lecteur à suivre notre démarche, nous pouvons aussi considérer le cas particulier d'un cercle de rayon ρ , paramétré en affixes par $z(\theta) = \rho e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$; la vitesse est en ce cas $\frac{dz}{d\theta} = iz$, de module ρ ; l'abscisse curviligne peut alors être choisie comme $s(\theta) = \rho\theta$, amenant un nouveau paramétrage $z(s) = \rho e^{i\frac{s}{\rho}}$, amenant $\tau = \frac{dz}{ds} = ie^{i\theta}$ puis $\nu = i\tau = -e^{i\theta}$. Le vecteur normal pointe ici vers le centre du cercle, ce qui est bien ... normal!

Le repère orthonormal direct $(M(s), \tau(s), \nu(s))$ est appelé le *repère de Frenet*⁴ au point $M(s)$, et il « glisse » le long de la courbe quand s varie.

1. Dans toute la suite, nous supposons que toutes les fonctions sont autant de fois dérivables que nécessaire.

2. Il est ici tout à fait inutile de noter cela $\frac{dOM}{ds}$ puisque l'origine n'a aucune influence sur cette dérivée.

3. En termes mathématiques, on dit que s est l'abscisse curviligne le long de la courbe.

4. Jean-Frédéric Frenet (1816-1900), voir aussi [1]. Ce repère avait sans doute été déjà introduit par ses prédécesseurs et contemporains, dont Joseph-Alfred Serret.

Nous allons maintenant chercher les dérivées de ces fonctions vectorielles de s ; en dérivant le produit scalaire⁵ exprimant que $\tau(s)$ est de longueur 1, nous obtenons :

$$0 = \frac{d}{ds} \langle \tau(s) | \tau(s) \rangle = \left\langle \frac{d}{ds} \tau(s) | \tau(s) \right\rangle + \langle \tau(s) | \frac{d}{ds} \tau(s) \rangle = 2 \left\langle \frac{d}{ds} \tau(s) | \tau(s) \right\rangle$$

Ainsi, le vecteur $\frac{d\tau}{ds}$ est perpendiculaire à $\tau(s)$ et donc colinéaire à $\nu(s)$; on pose ainsi $\frac{d\tau}{ds} = \gamma(s)\nu(s)$, le paramètre γ ainsi introduit s'appelant la *courbure* au point de paramètre s ⁶. Excepté le cas embarrassant où $\gamma(s)$ est nul (que nous éliminerons), et compte tenu du fait que $\frac{d\tau}{ds}$ est homogène à l'inverse d'une longueur⁷, nous pouvons poser $\gamma(s) = \frac{1}{R(s)}$; $R(s)$ s'appelle le *rayon de courbure* au point de paramètre s . En dérivant de même les égalités $\|\nu(s)\|^2 = 1$ et $\langle \tau(s) | \nu(s) \rangle = 0$, on trouve la formule $\frac{d\nu}{ds} = -\gamma(s)\tau(s)$.

Nous sommes maintenant bien équipés pour chercher un cercle qui « colle » au mieux à la courbe C (comme le fait la tangente, mais avec une meilleure proximité grâce aux choix du centre et du rayon du cercle).

Imaginons donc un cercle de centre Ω et de rayon ρ ; la proximité entre ce cercle et la courbe au point de paramètre s_0 pourra être évaluée au moyen de la quantité $\delta(s) = d(\Omega, M(s))^2 - \rho^2$ pour s voisin de s_0 . Pour commencer, on va faire en sorte que $\delta(s_0) = 0$, amenant $d(\Omega, M(s_0)) = \rho$. On prend ensuite un développement limité de la fonction vectorielle $\Omega M(s)$ au voisinage de $s = s_0$ (formule de Taylor-Young) et on le reporte dans le carré de la norme, développé en produits scalaires :

$$\begin{aligned} \delta(s) &= \left\| \Omega M(s_0) + (s - s_0)\tau(s_0) + \frac{1}{2}(s - s_0)^2\gamma(s_0)\nu(s_0) + o((s - s_0)^2) \right\|^2 - \rho^2 \\ &= 2(s - s_0)\langle \Omega M(s_0) | \tau(s_0) \rangle + (s - s_0)^2 \left[1 + \gamma(s_0)\langle \Omega M(s_0) | \nu(s_0) \rangle \right] + o((s - s_0)^2) \end{aligned}$$

Pour que cette quantité soit la plus petite possible lorsque s s'approche de s_0 , on prend $\langle \Omega M(s_0) | \tau(s_0) \rangle = 0$, ce qui revient à placer Ω sur la normale à la courbe au point de paramètre s_0 , soit $\Omega M(s_0) = \lambda \nu(s_0)$, λ étant un nombre réel restant à déterminer. Enfin, on peut faire en sorte que $\gamma(s_0)\langle \Omega M(s_0) | \nu(s_0) \rangle = -1$, ce qui revient à prendre $\lambda = \frac{-1}{\gamma(s_0)}$, soit en fin de compte : $M(s_0)\Omega = R(s_0)\nu(s_0)$.

En d'autres termes, la « bonne » position pour le centre du cercle se trouve en portant une longueur $|R(s_0)| = \frac{1}{|\gamma(s_0)|}$ sur la normale et dans la direction de $\nu(s_0)$ si $\gamma(s_0) > 0$, ou dans la direction contraire sinon. Le point $\Omega(s_0)$ ainsi défini s'appelle le *centre de courbure*, tandis que le cercle de centre $\Omega(s_0)$ et de rayon $R(s_0)$ s'appelle le *cercle de courbure* ou *cercle osculateur*⁸, tous relatifs au point de C de paramètre s_0 .

5. Nous notons ici $\langle u_1 | u_2 \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs u_1 et u_2 (calculé par rapport à une base orthonormale quelconque). Si les deux vecteurs sont des fonctions, ce produit scalaire se dérive suivant la même règle que tout produit de fonctions (par bilinéarité) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \langle u_1(s) | u_2(s) \rangle &= \frac{d}{ds} (x_1(s)x_2(s) + y_1(s)y_2(s)) \\ &= \frac{dx_1}{ds} x_2(s) + x_1(s) \frac{dx_2}{ds} + \frac{dy_1}{ds} y_2(s) + y_1(s) \frac{dy_2}{ds} \\ &= \left\langle \frac{du_1}{ds} | u_2(s) \right\rangle + \langle u_1(s) | \frac{du_2}{ds} \rangle \end{aligned}$$

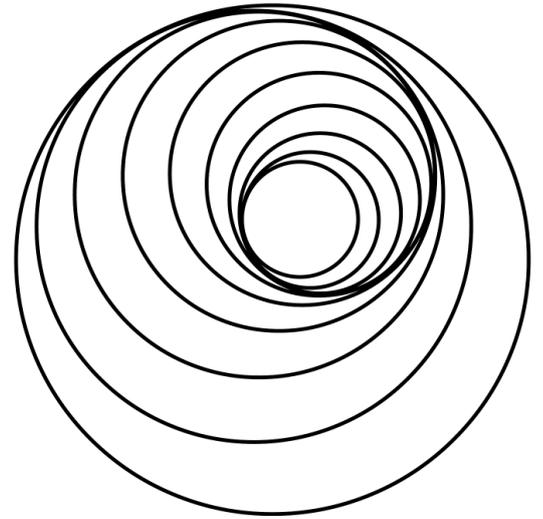
6. Le signe de la courbure s'interprète ainsi : s'il est positif, la courbe « tourne à gauche » de sa tangente, et « à droite » sinon. Le vecteur $\frac{d\tau}{ds}$ n'est autre que l'accélération du point $M(s)$; que cette accélération soit « normale » (sans composante tangentielle) provient précisément du fait que le parcours de la courbe C se fait à « vitesse constante ».

7. Notre « fourmi marcheuse » assimile longueurs et durées (1cm = 1s), si bien qu'elle mesure le vecteur $\frac{d\tau}{ds}$ en cm^{-1} .

8. Le mot « osculateur » vient du verbe latin osculare, signifiant « embrasser, baiser »; son usage en mathématiques semble remonter à Leibniz (voir [2] et [5]).

4 Imitations

C'est ainsi qu'on peut produire un graphisme du genre de ceux que proposait Kupka en choisissant une courbe plane et en traçant quelques-uns de ses cercles osculateurs (régulièrement sélectionnés). Nous proposons ci-contre un tel exemple, basé sur une spirale logarithmique, en invitant le lecteur à se persuader du fait que cette figure n'est formée que de cercles, sans aucune courbe supplémentaire; le version animée de cette figure est accessible en cliquant sur cette image. L'artiste a utilisé d'autres spirales, bien à lui, comme nous le suggère cette œuvre *Abstrakče XI* faisant partie d'une brochure publiée en 1933. . .



5 Le secret final

Il nous reste à expliquer pourquoi les cercles osculateurs associés à une spirale (ou toute courbe dont la « courbure » varie de manière strictement monotone) sont « imbriqués » les uns dans les autres. Pour simplifier, nous supposons désormais que la fonction $s \mapsto \gamma(s)$ associée à la courbe C est positive et strictement croissante. Examinons comment le centre de courbure $\Omega(s) = M(s) + R(s)\nu(s)$ se déplace quand s varie⁹ :

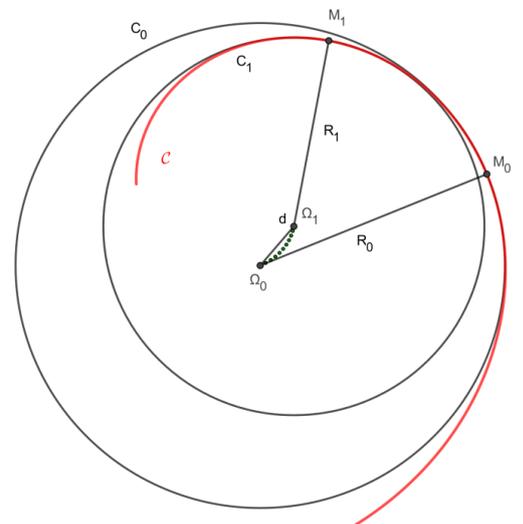
$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{ds} &= \frac{dM}{ds} + \frac{dR}{ds}\nu(s) + R(s)\frac{d\nu}{ds} \\ &= \tau(s) + \frac{dR}{ds}\nu(s) - \tau(s) = \frac{dR}{ds}\nu(s) \end{aligned}$$

Si nous considérons une portion de la courbe initiale C , obtenue pour s variant de s_0 à s_1 , la longueur de la trajectoire décrite par Ω est

$$\int_{s_0}^{s_1} \left\| \frac{d\Omega}{ds} \right\| ds = \int_{s_0}^{s_1} \left| \frac{dR}{ds} \right| ds = R(s_0) - R(s_1)$$

parce qu'ici la fonction $s \mapsto R(s)$ est décroissante.

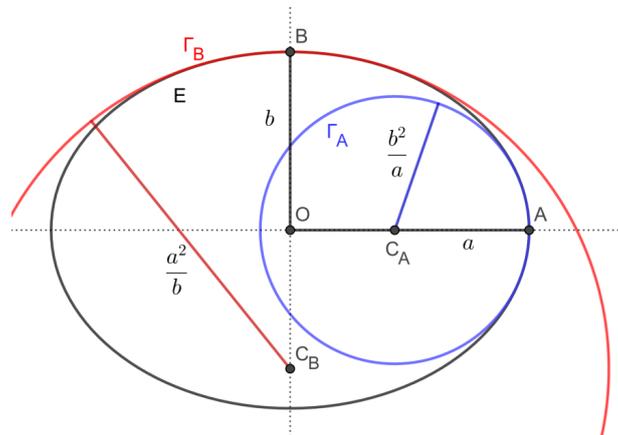
Cependant, la longueur de l'arc de la courbe décrit par Ω est au moins égale à la longueur de la corde qui le sous-tend, c'est-à-dire à la distance entre les deux centres $\Omega(s_0)$ et $\Omega(s_1)$. Cette inégalité s'écrit $d(\Omega(s_0), \Omega(s_1)) \leq R(s_0) - R(s_1)$, exprimant précisément que le cercle osculateur au point de paramètre s_1 est « à l'intérieur » du cercle osculateur au point de paramètre s_0 .



9. La trajectoire du centre de courbure s'appelle la *développée*.

6 En guise de conclusion

Les cercles osculateurs, tels que nous les avons découverts, jouent aussi un rôle dans toutes sortes d'applications : en mécanique bien sûr, mais aussi pour esquisser le tracé d'une ellipse en quatre coups de compas :



C'est ici que s'achève ce parcours autour de quelques-unes des œuvres abstraites de Kupka, qui nous a amenés à exercer notre regard, passant de l'observation à la compréhension, aboutissant à une exploration attentive d'un aspect aujourd'hui peu connu de la géométrie différentielle ; n'est-ce pas ce à quoi l'œuvre d'art comme celle de la nature nous invitent de manière plus générale, nous interpellant constamment pour peu que nous sachions manifester notre curiosité ?

7 Références

- [1] Bibm@ath.net, *Biographie de Jean-Frédéric Frénet*
<http://www.bibmath.net/bios/index.php?action=affiche&quoi=frenet>
- [2] Wikipedia, *Article sur le cercle osculateur*
https://fr.wikipedia.org/wiki/Cercle_osculateur
- [3] Publimath, *Fiche bibliographique sur le cercle osculateur*
<http://publimath.irem.univ-mrs.fr/publimath.php?r='cercle+osculateur'&t=n>
- [4] Accromath, *Virer sans déraper* (automne 2014). Article introductif sur la courbure et les cercles osculateurs.
<http://accromath.uqam.ca/2014/10/virer-sans-deraper>
- [5] Gottfried Wilhelm Leibniz, *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi...*
Reproduction fournie par Gallica (BnF)