
Comment comparer des volumes ? (fiche du professeur)

Cette activité d'étude et de recherche permet d'introduire ou bien de réinvestir des notions nouvelles ou des méthodes spécifiques du **programme de seconde** à travers une problématique donnée : comparer des volumes. Elle est divisée en paragraphes qui peuvent être traités à des moments différents durant l'année. Elle permet notamment de donner un sens au calcul algébrique qui valide ici les solutions d'une équation trouvées graphiquement ou par une méthode algorithmique. Par ailleurs, la résolution des différentes questions donne l'occasion de travailler de façon pratiquement exhaustive les **compétences mathématiques**.

Plusieurs questions de cette activité peuvent être déjà abordées en classe de **troisième**.

Mots-clefs. fonction, théorème de Thalès, équation, inéquation, résolution approchée d'équations, patron, géométrie dans l'espace, algorithme de dichotomie, condition nécessaire et suffisante

Niveau. Troisième, Seconde

Connaissances

- notion de fonction ;
- fonction affine ;
- théorème de Thalès (3^e) ;
- calcul algébrique ;
- valeur exacte et valeur approchée d'un nombre (3^e) ;
- calcul avec des radicaux (3^e) ;
- résolution exacte d'une équation et d'une inéquation ;
- méthodes de résolution approchée d'une équation ;
- condition nécessaire et suffisante.

Capacités

- représenter en perspective des solides ;
- réaliser des patrons ;
- mettre un problème en équation ;
- encadrer une solution d'une équation grâce à un algorithme de dichotomie ;
- encadrer une solution d'une équation par balayage ;
- résoudre algébriquement et graphiquement une équation ;
- résoudre une inéquation à partir de l'étude du signe d'une expression produit.

Compétences transversales

chercher : analyser, extraire l'information utile, observer, expérimenter, émettre une conjecture ;

modéliser : traduire en langage mathématique, simuler, valider ou invalider un modèle ;

représenter : choisir un cadre numérique, algébrique, géométrique, graphique, passer d'un mode à l'autre, changer de registre ;

calculer : effectuer un calcul automatisable à la main ou à l'aide d'un instrument calculatrice, logiciel, mettre en œuvre des algorithmes simples, exercer l'intelligence de calcul, contrôler les calculs.

Notes sur le problème

1. Modélisation :

- Cette étape est l'occasion de parler un peu de physique en précisant que le niveau d'un liquide en équilibre est horizontal et que par conséquent les bases de deux cônes sont parallèles.
- La problématique est ici simplifiée pour pouvoir être traitée en **seconde**. En effet, la question que l'on se pose naturellement est plutôt « à quelle hauteur faut-il remplir les verres pour qu'ils contiennent la même quantité de liquide ? » où la hauteur se mesure par rapport à la table. Dans ce cas, on aboutit alors à une équation du troisième degré qui peut être résolue en classe de **première ou terminale** par des méthodes approchées. L'utilisation du tableur, de la calculatrice ou d'un algorithme deviennent alors plus légitimes et ont un vrai rôle.

2. Expérimentation : ce moment peut être l'occasion de mentionner quelques exemples de démarche scientifique de mathématiciens :

- l'expérience de l'équilibre des liqueurs et l'expérience du tonneau de Pascal.

3. Résolution du problème :

- Nous avons pris le parti de ne pas simplifier par h l'équation (E) dans les résolutions par balayage et par dichotomie (paragraphe IV.3 et IV.4). En effet, les différents paragraphes peuvent être traités ainsi de façon indépendante permettant à l'enseignant d'adapter l'activité à la progression choisie dans sa classe.
- Nous avons fait le choix de résoudre l'équation $V(x) - W(x) = 0$ plutôt que l'équation $(E) \quad V(x) = W(x)$ dans la résolution par balayage de (paragraphe IV.3) pour que l'encadrement de la solution soit plus visible sur le tableur par les élèves mais surtout pour rendre plus facile ensuite l'interprétation et la compréhension de l'algorithme de dichotomie.
- À ce propos, l'étude de celui-ci est aussi l'occasion de parler de terminaison et de preuve d'algorithmes.

4. Comparaison avec un verre sphérique :

- Le calcul du volume de la calotte sphérique peut être fait en **terminale S** en application du calcul intégral.
- Ce paragraphe peut être aussi le point de départ pour introduire le taux d'accroissement d'une fonction et par là la **dérivation** en classe de **première**.
- La notion de **convexité** et de **point d'inflexion** peut être abordée lors de l'étude de la fonction S en classe de **terminale ES**.

5. Condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une solution :

- La dernière partie permet de découvrir en seconde de manière intuitive le théorème des valeurs intermédiaires et de travailler la condition nécessaire et suffisante.
- La preuve de l'existence d'aucune, une ou deux solution(s) au problème « Existe-t-il une hauteur x pour laquelle le volume de deux verres soit identique ? » lorsque on dispose d'un verre cylindrique et d'un verre conique ou d'un verre cylindrique et d'un

verre sphérique est l'occasion en classe de **terminale S** d'appliquer le **théorème des valeurs intermédiaires** et le **théorème de bijection monotone**.

Anne Chomel
anne.chomel@hotmail.fr
Lycée Jean-Baptiste Say
11 bis, rue d'Auteuil
75 016 Paris