# Le Rubik's cube et son petit frère, le Taquin à retournement, du point de vue de la théorie des groupes

par Ivan Riou[1]

Rapporteur : Mathieu Mansuy[2]

Remerciements : David Pouvreau[3]

**Résumé**
Cet article est destiné au grand public. Sa construction circule en permanence entre théorie et pratique. Les notions introduites et développées sont celles d'une licence de mathématiques.
L'objet de cet article est la modélisation mathématique de deux jeux : d'une part, le Rubik's cube et d'autre part, son petit frère « aplati », le Taquin à retournement. Cette modélisation a un double objectif :

(1) Dégager la structure mathématique de chacun de ces deux jeux et proposer des outils de recherche et d'analyse de mouvements afin que le lecteur en assimile les intérêts spécifiques et puisse ensuite élaborer de lui-même une méthode de résolution. Et l'étude exhaustive du Taquin nous permet d'appréhender bien plus finement les problématiques du Rubik's cube.

(2) Utiliser ces jeux pour contextualiser des notions théoriques d'algèbre structurale, en faisant de ces jeux des supports pédagogiques pour introduire ces notions et en illustrer les principes fondamentaux. Il s'agit par là-même d'en illustrer l'intérêt de manière convaincante.

# Introduction

Chacun a, un jour ou l'autre, tenu dans ses mains un Rubik's cube. Cet objet a été créé en 1974 par l'architecte et designer hongrois Ernö Rubik. Sa résolution, c'est-à-dire la réorganisation par couleur de chacune des 6 faces en composant des rotations d'un quart de tour de ses faces sur elles-mêmes dans le sens trigonométrique, que nous appellerons dans la suite **mouvements élémentaires**, peut de prime abord sembler simple ; mais on se rend vite compte qu'en voulant ordonner tel sommet ou telle arête, on dérange d'autres parties du cube. Lorsque l'on se procure un Rubik's cube, il est fourni un « mode d'emploi », c'est-à-dire un algorithme qui permet de réorganiser les couleurs en plusieurs étapes. Apprendre par cœur les méthodes de ce « mode d'emploi » présente certes l'avantage de savoir résoudre efficacement le cube, mais aussi l'inconvénient majeur de ne pas s'être réellement confronté à ses difficultés, ignorant en fait essentiellement ses mystères, mystères que nous allons dévoiler en modélisant mathématiquement le Rubik's cube.

Dans la première partie, nous verrons que les mouvements qui permettent de passer d'un état, appelé **configuration**, à un autre, peuvent se traduire mathématiquement par l'action d'un groupe sur l'ensemble de ces configurations possibles. On construit alors une structure de **graphe** dont les **sommets** sont ces configurations. Ces sommets sont liés par une **arête** si on peut passer de l'un à l'autre par un mouvement élémentaire. La résolution de notre Rubik's cube en un nombre

---

[1] Professeur agrégé de mathématiques, enseignant en licence de mathématiques générales au Centre Universitaire de Mayotte.
[2] Professeur agrégé et docteur en mathématiques, enseignant en CPGE au lycée Louis Pergaud de Besançon.
[3] Je tiens à remercier également David Pouvreau, professeur agrégé de mathématiques et docteur en histoire des sciences, enseignant en CPGE au lycée Roland Garros du Tampon, pour ses encouragements, son aide de structuration et de mise en forme.

minimal de coups, dont on abordera la problématique, amène à la recherche d'un **chemin de longueur minimale** dans ce graphe menant d'une configuration à la configuration résolue.

L'intérêt de l'étude du Taquin à retournement, objet plus simple mais aux propriétés très similaires, apparaîtra au fil de la lecture de la seconde partie. En effet, nous allons pouvoir trouver ce chemin minimal pour le Taquin à retournement. Cela nécessitera une étude plus fine et plus aboutie de l'action d'un groupe opérant sur un ensemble. L'action du groupe des symétries du carré nous permettra de restreindre l'ensemble des configurations à considérer. On pourra ainsi résoudre le problème de la recherche d'un chemin minimal sur un graphe plus petit.

Les notions mathématiques qui sont développées dans cet article, et qui découlent naturellement de l'étude de ces deux objets, sont plus précisément les suivantes :

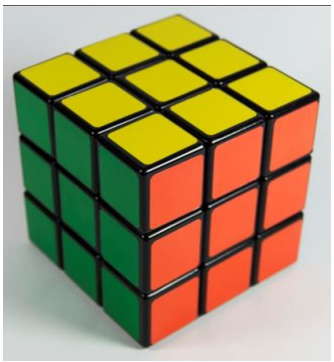
**(1)** Groupes :
- (a) Notions de groupe, de sous-groupe, de relation d'équivalence, de sous-groupe distingué, de groupe quotient, de groupe engendré par un élément et d'ordre d'un élément, d'isomorphisme.
- (b) Action d'un groupe sur un ensemble : orbite, stabilisateur, opérations libre et transitive, formule des classes.
- (c) Groupes symétriques, groupe diédral du carré.

**(2)** Graphes :
- (a) Configurations voisines, graphe et structure d'espace métrique associé.
- (b) Recouvrement d'un graphe par des boules de rayon donné, sous-graphe des centres des boules et fluidité du trajet en passant par les arêtes de ce sous-graphe.
- (c) Deux algorithmes de minimisation du trajet dans le graphe du taquin.

Les niveaux d'enseignement visés sont les deuxième et troisième années universitaires. Les généralités sur les groupes, le groupe engendré par un élément et le groupe symétrique sont du niveau licence 2. Les opérations d'un groupe sur un ensemble, le groupe diédral et la théorie des graphes peuvent être vus en licence 3. Cependant, ces notions mathématiques sont définies dans l'article afin qu'il soit autant que faire se peut accessible à un élève de Terminale scientifique qui suit la spécialité mathématique. Cet article est aussi destiné aux lecteurs désireux de découvrir ou d'approfondir des notions de base de mathématiques dans un contexte ludique et surprenant.

# 1. Modélisation mathématique du Rubik's cube

Notons **b** la configuration suivante du cube résolu, que l'on appellera **but**.



## 1.1. Ensemble $X$ et groupe $G$

### 1.1.1. Ensemble $X$ des configurations « au tournevis »

Le Rubik's cube est composé de 27 petits cubes. 7 d'entre-eux sont soudés et indémontables : le centre du cube et les centres de chacune des six faces. La partie démontable « au tournevis » se compose de 12 petits cubes arêtes que l'on appellera **arêtes** et de 8 petits cubes sommets que l'on appellera **sommets**. On distinguera les petits cubes de leurs emplacements. On appellera ces emplacements **site sommet** ou **site arête** selon les cas.

Lorsque vous démontez puis remontez ce cube « au tournevis », en extrayant temporairement les 20 petits cubes, puis en replaçant aléatoirement chacune des 12 arêtes sur un site arête et chacun des 8 sommets sur un site sommet en laissant bien sûr les faces colorées à l'extérieur du cube, vous obtenez ce que l'on appellera une **configuration** (« au tournevis »). Appelons $\boldsymbol{X}$ l'ensemble de ces configurations.

### 1.1.2. Définition d'un groupe et groupe $G$ des mouvements du cube

Pour obtenir, à l'aide d'un tournevis, une configuration $y \in X$ à partir d'une configuration $x \in X$, on doit déplacer certains petits cubes. On appelle ce déplacement un **mouvement,** noté $g$. L'ensemble $\boldsymbol{G}$ de ces mouvements, muni de cette loi **.** , forme un **groupe**, c'est-à-dire qu'il satisfait à la définition suivante :

(**i**) **Stabilité par composition** : $\forall g \in G\ , \forall g' \in G,\ \ g.g' \in G$.

(**ii**) **Associativité** : $\forall g \in G\ , \forall g' \in G\ , \forall g'' \in G,\ \ (g.g').g'' = g.(g'.g'')$.

(**iii**) Existence d'un **élément neutre** $e$ : $\forall g \in G,\ \ g.e = e.g = g$.

(**iv**) Existence d'un **inverse** : $\forall g \in G, \exists h \in G, h.g = g.h = e$.

Ces quatre propriétés sont clairement satisfaites par l'ensemble des mouvements :

→ Si l'on compose deux mouvements, il est clair que l'on obtient encore un mouvement du cube.
→ L'associativité est immédiate.
→ On considère que l'absence de déplacement est un mouvement du cube. Notons-le $\boldsymbol{e}$.
→ Un inverse du mouvement $g$ défini au **1.1.1.** est le mouvement qui permet, à partir de la configuration $y \in X$, d'obtenir la configuration $x \in X$.

### 1.1.3. Propriétés d'un groupe

Plusieurs propriétés et définition découlent de cette définition de groupe :

→ Propriété.
L'élément neutre, s'il existe, est nécessairement unique.

En effet, s'il existe deux éléments neutres $e$ et $e'$ alors $e.e' = e' = e$ donc $e' = e$.

→ Propriété.
Si l'inverse d'un élément existe, il est unique.

En effet, supposons qu'il existe $g' \in G$ et $g'' \in G$ tels que $g.g' = g'.g = e$ et $g.g'' = g''.g = e$.
On a alors $g'.g.g'' = (g'.g).g'' = e.g'' = g''$ mais aussi :

$$g'.g.g'' = g'.(g.g'') = g'.e = g' \text{ d'où } g' = g''.$$

→ Définition.
On appelle alors l'élément $g'$ **l'inverse de $g$**, et on le note $\boldsymbol{g^{-1}}$.

→ Propriétés.
(1) $e^{-1} = e$

(2) $\forall g \in G\ , \forall g' \in G, (g.g')^{-1} = g'^{-1}.g^{-1}$.

(3) $\forall g \in G\ , ((g^{-1})^{-1}) = g$.

Preuve.
(1) Les relations $e^{-1}.e = e.e^{-1} = e$ et $e.e = e.e = e$ impliquent, par unicité de l'inverse, que $e^{-1} = e$.

(2) $\forall g \in G\ , \forall g' \in G,\ (g'^{-1}.g^{-1}).(g.g') = g'^{-1}.(g^{-1}.g).g' = g'^{-1}.e.g' = g'^{-1}.g' = e$
De même : $\forall g \in G\ , \forall g' \in G,\ (g.g').\left(g'^{-1}.g^{-1}\right) = e$.

(3) Résulte immédiatement de la relation $g.g^{-1} = g^{-1}.g = e$.

→ Définition.
L'ordre **d'un groupe fini $G$** est le **cardinal** de ce groupe, c'est-à-dire le nombre d'éléments de ce groupe. On le note $\mathbf{card}(\boldsymbol{G})$**.**

### **1.1.4.** Dénombrement des configurations au tournevis.

Calculons le cardinal de $X$. Pour cela :

→ Nous allons ici calculer le nombre total de configurations au tournevis. Pour cela, nous allons distinguer d'une part les positions des petits cubes, c'est-à-dire là où ils sont situés et d'autre part les orientations de ces petits cubes, c'est-à-dire la façon dont ils sont tournés.

→ Positionnons d'abord chacun des 8 cubes sommets sur un site sommet.
Pour le premier sommet, il y a 8 sites sommets possibles.
Pour le deuxième, il y en a 7.
…
Et ainsi de suite.
Il y a donc $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8!$ façons de positionner les 8 cubes sommets sur les sites sommets. Il reste à les orienter.

→ Pour chacun de ces 8 cubes sommets, il y a 3 orientations possibles, donc $3^8$ combinaisons.

→ On raisonne de même avec les 12 cubes arêtes qui ont chacune deux orientations. Il y a donc $12 \times 11 \times .. \times 2 \times 1 = 12!$ façons de positionner ces 12 cubes arêtes, et $2^{12}$ orientations possibles.

→ On combine enfin ces deux résultats pour obtenir
$\text{card}(X) = 3^8 \times 8! \times 2^{12} \times 12! \approx 5{,}2 \times 10^{20}$

Calculons à présent le cardinal de $G$.
$G$ est par définition l'ensemble des mouvements du cube « au tournevis ».
Pour chaque configuration, il existe donc un mouvement du cube « au tournevis » qui mène du but $b$ à cette configuration.
Et ce mouvement est unique car les petits cubes sont deux à deux distincts.
Ainsi le groupe $G$ des mouvements au tournevis est fini et d'ordre :

$$\text{card}(G) = \text{card}(X) = 3^8 \times 8! \times 2^{12} \times 12! \approx 5{,}2 \times 10^{20}$$

## 1.2. Mouvements légaux et configurations légales

*Pour plus de clarté, nous supposerons que les centres des faces restent fixes.*

### 1.2.1. Définition

On dit que $H = (H, ., e)$ est un **sous-groupe** de $G = (G, ., e)$ s'il vérifie les propriétés (**i**), (**ii**) et (**iii**) qui suivent :

(**i**) Appartenance de l'élément neutre au sous-groupe. $e \in H$.

(**ii**) Stabilité par produit. $\forall h \in H\ , \forall h' \in H, h.h' \in H$.

(**iii**) Stabilité par inverse. $\forall h \in H, h^{-1} \in H$.

### 1.2.2. Description de l'ensemble $H$ des mouvements légaux

($\boldsymbol{a}$) Un **mouvement élémentaire** est, comme nous l'avons défini dans l'introduction, l'une des six rotations d'une face d'un quart de tour dans le sens trigonométrique – pour bien définir ce sens trigonométrique, il faut imaginer que ladite face est devant nous. Seuls les éléments de cette face sont mis en mouvement.
Attention, un mouvement élémentaire n'est pas une **rotation de l'espace**. Une rotation de l'espace ne fait pas fonctionner les articulations du cube.

($\boldsymbol{b}$) Un **mouvement légal** est une composée de mouvements élémentaires. L'absence de mouvement est considérée comme la composée de zéro mouvements élémentaires.
Notons que chacun des 6 inverses d'un mouvement élémentaire est un mouvement légal, puisqu'il peut s'obtenir en composant ce mouvement élémentaire 3 fois. (voir exemple ci-dessous)

### 1.2.3. Propriété

L'ensemble $\boldsymbol{H}$ **des mouvements légaux**, muni de la loi de composition, est un **sous-groupe** de $G$.

(**i**) $e \in H$. En effet, l'absence de mouvement est considérée comme un mouvement.
(**ii**) $\forall h \in H\ , \forall h' \in H, h.h' \in H$. Cette stabilité par composition résulte directement de la construction.
(**iii**) $\forall h \in H, h^{-1} \in H$.
En effet, si $h \in H$, il existe $n$ mouvements élémentaires $h_1\ , h_2\ , .., h_n$tels que $h = h_1\ .\ h_2\ ..h_n$.
L'élément $h'$ défini par $h' = (h_n)^3\ ..\ (h_2)^3.(h_1)^3$ vérifie $h.h' = h'.h = e$

### 1.2.4. Sous-groupe engendré

→ Propriété.
Soit $G$ un groupe, et $(H_i)_{1 \le i \le n}$ une famille de sous-groupes de $G$. Alors l'intersection

$$\bigcap_{i=1}^{n} H_i \text{ de ces sous} - \text{groupes est un sous} - \text{groupe de } G.$$

La preuve est immédiate.

→ Définition.
Soit $E$ un sous-ensemble d'un groupe $G$. On appelle **sous-groupe engendré par** $\boldsymbol{E}$ l'intersection de tous les sous-groupes de $G$ qui contiennent $E$. On note cet ensemble $< E >$.

D'après la propriété qui précède, $< E >$ est bien un sous-groupe de $G$. Par définition, il s'agit, au sens de l'inclusion, du petit sous-groupe de $G$ qui contient $E$. On a donc :

$$< E > = \{g_1^{k_1}.g_2^{k_2}..g_p^{k_p}, p \in \mathbb{N}, (g_1,..,g_p) \in E^p, (k_1,..k_p) \in \mathbb{Z}^p\}$$

→ Propriété.
Le sous-groupe $H$ des mouvements légaux est **le sous-groupe engendré** par les 6 mouvements élémentaires.

En effet, $H$ est le plus petit sous-groupe qui contienne à la fois les 6 mouvements élémentaires, ses inverses et toute composée, dans un ordre quelconque, de ces 12 mouvements.

→ Exemple.
Soit $d$ le mouvement élémentaire de la face de droite dans le sens trigonométrique.
On a $d.d^3 = d^3.d = d^4 = e$ donc $d$ est inversible et $d^{-1} = d^3$
L'inverse de $d$ s'obtenant à partir d'une puissance de $d$, le sous-groupe engendré par $d$, noté $< d >$, est le suivant :

$$< d > = \{d, d^2, d^3, d^4 = e\}.$$

Le groupe engendré par $d$ est donc d'ordre 4.

### 1.2.5. Ensemble $X_l$ des configurations légales

Les mouvements modifient la configuration du Rubik's cube. On appelle **ensemble des configurations légales ou résolubles**, noté $\boldsymbol{X_l}$, l'ensemble des configurations qui peuvent être obtenues à partir du but $b$, c'est-à-dire du Rubik's cube résolu, par une succession de mouvements élémentaires. La définition de $X_l$ peut être énoncée plus naturellement à l'aide de la théorie des groupes. On introduit donc pour cela l'action d'un groupe sur un ensemble.

## 1.3. Action (ou opération) d'un groupe sur un ensemble. Relation d'équivalence

### 1.3.1. Action d'un groupe sur un ensemble. Orbites

→ Définition
Une **opération** ou **action** d'un groupe $G = (G, ., e)$ sur un ensemble $X$ est une application :

$$\left| \begin{array}{l} G \times X \to X \\ (g,x) \mapsto g(x) \end{array} \right. \text{ telle que : } \begin{cases} (*)\ \forall x \in X\ ,\ \ e(x) = x \\ (**)\ \forall g \in G\ , \forall g' \in G,\ \ (g.g')(x) = g(g'(x)) \end{cases}$$

→ Définitions
Soit $x \in X$. On définit **l'orbite de $\boldsymbol{x}$ sous l'action de $\boldsymbol{G}$** par $G(x) := \{g(x)\ , g \in G\}$.

On dit que **$\boldsymbol{G}$ opère transitivement sur $\boldsymbol{X}$** si pour tout $x \in X$, $G(x) = X$.

Lorsque $G$ est l'ensemble des mouvements du cube, pour toute configuration $x$ du cube, l'orbite de $x$ sous l'action de $G$ est égale à l'ensemble $X$ des configurations du cube. $G$ agit donc transitivement sur $X$.

→ Action par restriction
Soit $H$ un sous-groupe de $G$. Alors $H$ agit également sur $X$.

Lorsque $H$ est l'ensemble des mouvements légaux du cube, l'orbite du but $b$ sous l'action de $H$ est l'ensemble des configurations s'obtenant à partir de $b$ par une composée de mouvements élémentaires, ou plus simplement par un mouvement légal. C'est donc par définition l'ensemble $X_l$ des configurations légales du cube. On a donc $X_l = H(b)$. Nous allons voir au **1.7.** que $X_l$ est

strictement inclus dans $X$, c'est-à-dire que $H$ n'opère pas transitivement sur $X$. Ce qui signifiera qu'une configuration obtenue « au tournevis » n'est pas nécessairement résoluble.

### 1.3.2. Relation d'équivalence associée aux orbites

#### 1.3.2.1. Relation d'équivalence sur $X$, partition d'un ensemble par une relation d'équivalence

→ Définition
Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur $X$ est un sous-ensemble $Z$ de $X \times X$. Si $(x\,;y) \in Z$, on dit que $x$ est en relation avec $y$. On note alors $x\,\mathcal{R}\,y$.

→ Définition
On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence sur $X$**, si elle vérifie les propriétés suivantes :

(**i**) **Réflexivité** : $\forall x \in X, x\,\mathcal{R}\,x$.

(**ii**) **Symétrie** : $\forall x \in X\,, \forall y \in X, x\,\mathcal{R}\,y$ implique $y\,\mathcal{R}\,x$.

(**iii**) **Transitivité** : $\forall x \in X\,, \forall y \in X\,,\ \forall z \in X\,, x\,\mathcal{R}\,y$ et $y\,\mathcal{R}\,z$ implique $x\,\mathcal{R}\,z$.

→ Propriété.
Soit $(G, ., e)$ un groupe, $H$ un sous-groupe de $G$.
On définit la relation $\mathcal{R}$ sur $X$ par : $x\,\mathcal{R}\,y \iff \exists h \in H,\ y = h(x)$.
Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Preuve.
(**i**) **Réflexivité**
Soit $x \in X. x = e(x)$ avec $e \in H$ donc $x\,\mathcal{R}\,x$.

(**ii**) **Symétrie**
Soit $(x\,;y) \in X^2$ tel que , $x\,\mathcal{R}\,y$. Il existe donc $h \in H$ tel que $y = h(x)$.
Comme $H$ est un groupe, $h^{-1}$ existe et appartient à $H$.
On a donc $h^{-1}(y) = h^{-1}\big(h(x)\big) = (h^{-1}.h)(x) = e(x) = x$, soit $\quad x = h^{-1}(y)$, d'où $y\,\mathcal{R}\,x$.

(**iii**) **Transitivité**
Soit $(x\,;y\,;z) \in X^3$ tel que $x\,\mathcal{R}\,y$ et $y\,\mathcal{R}\,z$
$x\,\mathcal{R}\,y$ donc il existe $h_1 \in H$ tel que $y = h_1(x)$.
$y\,\mathcal{R}\,z$ donc il existe $h_2 \in H$ tel que $z = h_2(y)$.
On a donc $z = h_2(y) = h_2\big(h_1(x)\big) = (h_2.h_1)(x)$ avec $h_2.h_1 \in H$, d'où $x\,\mathcal{R}\,z$

#### 1.3.2.2. Classe d'équivalence

Pour tout $x \in X$ , on définit la **classe d'équivalence de $x$ modulo $\mathcal{R}$** par l'ensemble :

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \{y \in X, x\,\mathcal{R}\,y\}$$

Interprétation pour notre Rubik's cube : $\bar{x} = \{y \in X\,, \exists h \in H, y = h(x)\} =: \boldsymbol{H(x)}$.

C'est l'ensemble des configurations que l'on peut obtenir à partir de la configuration $x$ en faisant agir un mouvement légal. C'est aussi **l'orbite de $x$ sous l'action de $H$**. En particulier, si $x$ est une configuration légale, $\bar{x}$ est l'ensemble des configurations légales.

#### 1.3.2.3. Partition

On peut énoncer la propriété et la définition suivantes :

Propriété.
$X$ est la réunion disjointe de ses classes d'équivalences pour la relation $\mathcal{R}$ définie ci-dessus.

On dit alors que **$X$ est partitionné par ses classes d'équivalence**.

Preuve.
→ Comme $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $X$, $\mathcal{R}$ est réflexive donc : $\forall x \in X,\ \{x\} \subset \bar{x}$.
On a donc $X \subset \bigcup_{x \in X} \bar{x}$ . L'inclusion réciproque est immédiate car : $\forall x \in X, \bar{x} \subset X$.
$X$ est donc la réunion de ses classes d'équivalence.

→ Montrons à présent que cette réunion est **disjointe**, c'est-à-dire que 2 classes sont soit identiques, soit disjointes, c'est-à-dire sans élément commun.

Supposons que les classes $\bar{x}$ et $\bar{y}$ ne soient pas disjointes.
Il existe alors $z \in \bar{x} \cap \bar{y}$. On a alors $x\ \mathcal{R}\ z$ et $y\ \mathcal{R}\ z$. Par symétrie puis transitivité, on en déduit que $y\ \mathcal{R}\ x$, donc $x \in \bar{y}$.
Soit alors $u \in \bar{x}$. On a donc $x\ \mathcal{R}\ u$. On en déduit que $y\ \mathcal{R}\ u$, c'est-à-dire $u \in \bar{y}$.
On a donc établi l'inclusion $\bar{x} \subset \bar{y}$. Par symétrie, on a aussi $\bar{y} \subset \bar{x}$ , d'où $\bar{x} = \bar{y}$.

→ Bilan. Deux classes d'équivalences sont soit identiques, soit disjointes. $X$ est donc la réunion disjointe de ses classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$.

→ Interprétation pour le Rubik's cube : l'ensemble $X$ des configurations « au tournevis » est partitionné par un certain nombre de classes d'équivalence. Ces classes d'équivalence peuvent aussi être vues en tant qu'orbites de $x$ sous l'action de $H$. En effet, d'après **1.3.2.2.**,
$\forall x \in X,\ \bar{x} = H(x)$. On verra au **1.8.7.** que $X$ est partitionné par 12 orbites sous l'action de $H$.

## 1.4. Passage au quotient

### 1.4.1. Quotient modulo $\mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $X$

Définition
On appelle **ensemble quotient de $X$ modulo $\mathcal{R}$, noté $X/\mathcal{R}$**, l'ensemble $\{\bar{x}, x \in X\}$.
C'est un ensemble d'ensembles.

### 1.4.2. On définit alors la **projection canonique** $\pi : \left| \begin{array}{l} X \ \to X/\mathcal{R} \\ x \ \mapsto \bar{x} = \{y \in X, x\ \mathcal{R}\ y\} = H(x) \end{array} \right.$

On dit que $x$ est **un représentant** de $\bar{x}$. Ce n'est pas le seul, tout élément de $\bar{x}$ est un représentant de $X$.
La projection canonique $\pi$ associe à chaque élément la classe d'équivalence à laquelle cet élément appartient.

### 1.4.3. Relation d'équivalence sur $G$

#### 1.4.3.1. Classes à droite

Définitions

→ On peut également définir la relation $\mathcal{R}'$, cette fois-ci sur $G$, par : $g_1\ \mathcal{R}'\ g_2 \ \Leftrightarrow\ g_2 . {g_1}^{-1} \in H$
c'est-à-dire : $g_1\ \mathcal{R}'\ g_2 \Leftrightarrow \exists\ h \in H, g_2 = h.g_1 \Leftrightarrow g_2 \in H.g_1$ , avec la notation $H.g_1 := \{h.g_1, h \in H\}$.

→ Pour $g \in G$, l'ensemble $H.g$ est appelé **classe à droite de $g$ suivant le sous-groupe $H$**.
On vérifie de même que $\mathcal{R}'$ est une relation d'équivalence.

→ Ensemble quotient des classes à droite
On note $\boldsymbol{G}\backslash\boldsymbol{H} := \{\boldsymbol{Hg},\ \boldsymbol{g} \in \boldsymbol{G}\}$ l'ensemble quotient formé des classes à droite.

**1.4.3.2.** Classes à gauche

De la même manière, on peut définir l'ensemble $g.H := \{g.h,\ h \in H\}$ que l'on appellera **classe à gauche de $\boldsymbol{g}$ suivant le sous-groupe $\boldsymbol{H}$**.

On notera $G/H := \{gH,\ g \in G\}$ l'ensemble quotient formé des classes à gauche.

**1.4.4.** Cardinaux

**1.4.4.1.** Propriété

Soit $G$ un groupe fini, et $H$ un sous-groupe de $G$. Alors :

$$\mathrm{card}(G\backslash H) = \frac{\mathrm{card}(G)}{\mathrm{card}(H)}$$

Preuve.
Pour tout $g \in G$, l'application $\varphi_g : \left| \begin{array}{l} G \to G \\ g' \mapsto g'.g \end{array} \right.$ est bijective, d'inverse $\varphi_{g^{-1}}$
En effet, pour tout $g' \in G$, $\varphi_{g^{-1}}\left(\varphi_g(g')\right) = \varphi_{g^{-1}}(g'.g) = (g'.g).g^{-1} = g'.(g.g^{-1}) = g'$
donc $\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g = Id_G$ , où $Id_G : G \dashrightarrow G \quad g \longmapsto g$ est l'application identique de $G$.
On vérifie de même que $\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = Id_G$.
$\varphi_g$ est donc bijective, d'inverse $\varphi_{g^{-1}}$.

De plus, on a par définition $\varphi_g(H) = H.g$. Puisque les ensembles $G$ et $H$ sont finis, il vient $\mathrm{card}(H.g) = \mathrm{card}(H)$. Puisque $G = \coprod_{H.g \in G\backslash H} H.g$, on en déduit en prenant les cardinaux que :

$$\mathrm{card}(G) = \mathrm{card}(G\backslash H) \times \mathrm{card}(H)$$

**1.4.4.2.** Conséquence : théorème de **Lagrange**

Soit $G$ un groupe fini, et $H$ un sous-groupe de $G$.
Alors l'ordre du sous-groupe $H$ divise l'ordre du groupe $G$.

La preuve résulte immédiatement de la formule ci-dessus.

**1.4.5.** Sous-groupe distingué

**1.4.5.1.** Morphisme de groupes

Définition.
Un **morphisme de groupes** est une application $\pi : (G,\ .,e) \to (G',\times,e')$ telle que :

$$\forall g_1 \in G\ , \forall g_2 \in G,\ \ \pi(g_1\ .g_2) = \ \pi(g_1) \times \pi(g_2).$$

**1.4.5.2.** Sous-groupe distingué

→ Définition.
On dit qu'un sous-groupe $\boldsymbol{H}$ de $G$ **est distingué dans $\boldsymbol{G}$** si :

$$\forall h \in H\ , \forall g \in G,\ g^{-1}.h.g \in H$$

→ Cela signifie que : $\forall g \in G,\ gH = Hg$.

En effet, $\forall h \in H,\ \forall g \in G, \exists h' \in H, g^{-1}.h.g = h'$ donc en multipliant à gauche par $g$, on tire : $g.(g^{-1}.h.g) = g.h'$, c'est-à-dire $h.g \in g.H$, d'où $H.g \subset g.H$.

L'inclusion réciproque s'obtient en remplaçant $g$ par $g^{-1}$ dans la définition puis en multipliant à droite par $g$.

Autrement dit, les classes à gauche et les classes à droite selon $H$ sont identiques pour tout élément de $G$.

→ On admet que, pour notre Rubik's cube, le sous-groupe $H$ engendré par les mouvements élémentaires est distingué dans $G$. Pour le prouver de façon élémentaire, il suffit de faire appel à une notation intrinsèque des orientations des sommets et des arêtes, que l'on définira respectivement au **1.6.2.2.** et au **1.6.3.2.**

**1.4.5.3.** Définition d'une loi de groupe sur l'ensemble quotient

→ Revenons sur l'ensemble $G\backslash H$ des classes à droite de $G$ par la relation $\mathcal{R}'$. Munissons cet ensemble d'une structure de groupe. Pour tout couple $(\overline{g_1}, \overline{g_2})$ d'éléments de $G\backslash H$ on définit $\overline{g_1}.\overline{g_2} := \overline{g_1.g_2}$, c'est-à-dire $(Hg_1)(Hg_2) := Hg_1g_2$.

Lorsque $H$ est distingué dans $G$, cette opération est bien définie et on peut vérifier que $G\backslash H$ muni de cette opération est un groupe dont l'élément neutre est $H$.

Montrons que l'opération est bien définie :
si $\overline{g_1} = \overline{g'_1}$ et $\overline{g_2} = \overline{g'_2}$ alors il existe $(h_1, h_2) \in H^2, h_1.g_1 = g'_1$ et $h_2.g_2 = g'_2$.
On a alors : $\overline{g'_1.g'_2} = \overline{h_1.g_1.h_2.g_2} = \overline{h_1.(g_1.h_2.g_1^{-1}).g_1.g_2}$
où $g_1.h_2.g_1^{-1} \in H$ car $H$ est distingué dans $G$. Il en résulte que $g'_1.g'_2 \in Hg_1.g_2 = \overline{g_1.g_2}$
donc $\overline{g'_1.g'_2} \subset \overline{g_1.g_2}$. L'inclusion réciproque se prouve de façon identique par symétrie.

→ L'application $\pi' : \left| \begin{array}{l} G \to G/\mathcal{R}' \\ g \mapsto H.g \end{array} \right.$ est en outre un morphisme de groupes sous cette hypothèse.

## 1.5. Groupe symétrique

*Certains résultats de ce paragraphe sont admis afin d'éviter de surcharger l'article.*
*Voir par exemple le livre de Jean-Marie Monier : algèbre et géométrie MP, cours, méthodes et exercices corrigés, DUNOD.*

### 1.5.1. Définition

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Considérons l'ensemble des applications bijectives de $[\![1; n]\!]$ dans lui-même. Cet ensemble, muni de la **loi de composition** et de **l'application identité id** est un groupe, appelé **groupe symétrique** et noté $(\boldsymbol{S_n}, \boldsymbol{o}, \mathbf{id})$. Ses éléments sont appelés **permutations** de $n$ éléments. Ce groupe est non commutatif[4] pour $n \geq 3$. L'**ordre** de ce groupe, c'est-à-dire son cardinal, est $n!$

### 1.5.2. Exemple et notation

La permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ est la bijection : $[\![1\,;6]\!] \to [\![1\,;6]\!]$ telle que :

$$\sigma(1) = 3 \ ;\ \sigma(2) = 4 \ ;\ \sigma(3) = 6 \ ;\ \sigma(4) = 2 \ ;\ \sigma(5) = 5 \ ;\ \sigma(6) = 1$$

[4] Un groupe $(G, \ .\ , e)$ est dit **commutatif** si : $\forall (g, g') \in G^2, g.g' = g'.g$

*Nous allons reprendre cet exemple pour illustrer certains des sous-paragraphes qui vont suivre.*

### **1.5.3.** Transposition

Définition.
Une application $f \in S_n$ est appelée **transposition** s'il existe $(i\,;j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ avec $i \neq j$ tel que $f(i) = j\,;\, f(j) = i$ et $\forall k \in [\![1;n]\!]$ tel que $k \neq i$ et $k \neq j$ , on a $f(k) = k$.
On note alors cette transposition $(i\ \ j)$.

### **1.5.4**. p-cycle

→ Définition.
Plus généralement, $f \in S_n$ est appelée un $\boldsymbol{p-}$**cycle** s'il existe $p$ éléments $a_1\,, a_2, \dots, a_p$ deux à deux distincts de $[\![1;n]\!]$ tels que $f(a_1) = a_2\ \ ;\ \ f(a_2) = a_3\ \ ; \dots ;\ \ f(a_p) = a_1$

→ On note alors $f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & .. & a_{p-1} & a_p \\ a_2 & a_3 & a_4 & .. & a_p & a_1 \end{pmatrix}$ (les éventuels éléments invariants, appelés **points fixes**, n'ont pas besoin d'être notés) ou plus simplement $f = (a_1 \quad a_2 \ \ .. \quad a_p)$

→ Remarques.

Une transposition est un 2-cycle.

Le p-cycle $f = (a_1 \quad a_2 \ \ .. \quad a_p)$ peut aussi s'écrire $f = (a_2 \quad a_3 \ \ .. \quad a_p \quad a_1)$ ... Il possède donc $p$ écritures simplifiées distinctes.

### **1.5.5.** Support

→ Définition.
Le **support** d'une permutation $\sigma$, noté $\mathbf{supp}(\boldsymbol{\sigma})$, est l'ensemble des éléments distincts de leur image, c'est-à-dire : $\mathrm{supp}(\sigma) = \{i \in \mathbb{N}_n,\ \sigma(i) \neq i\}$

Dans l'exemple du **1.5.2.**, le **support de $\boldsymbol{\sigma}$ est $\mathbf{supp}(\boldsymbol{\sigma})$** $= \{1; 2; 3; 4; 6\}$, celui d'une transposition $(i\ \ j)$ est $\mathrm{supp}\big((i\ \ j)\big) = \{i; j\}$.

*On vérifie les propriétés suivantes :*

→ Propriété 1.
Deux permutations $\sigma$ et $\tau$ **à supports disjoints** commutent, c'est-à-dire :

$$\mathrm{supp}(\sigma) \cap \mathrm{supp}(\tau) = \emptyset \ \ \Rightarrow \sigma\ o\ \tau = \tau\ o\ \sigma$$

Remarque. Deux cycles quelconques ne commutent pas nécessairement.
En effet, dans $S_3$, les élements $\rho = (1\ \ 2)$ et $\omega = (1\ \ 3)$ ne commutent pas,
car $\rho \circ \omega = (1\ \ 3\ \ 2)$ alors que $\omega \circ \rho = (1\ \ 2\ \ 3)$. Ici, $\mathrm{supp}(\rho) \cap \mathrm{supp}(\omega) = \{1\} \neq \emptyset$

→ Propriété 2.
Toute permutation se décompose en **produit de cycles à supports disjoints**. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Notre exemple.
La transposition $\sigma$ définie au **1.5.2**. se décompose en produit de deux cycles à supports disjoints de la façon suivante : $\sigma = (1\ \ 3\ \ 6) \circ (2\ \ 4)$.

Chacun des éléments de $[\![1\,;n]\!]$ étant affecté au maximum par un cycle, ces cycles commutent.

→ Propriété 3.
$\forall\, \sigma \in S_n, \mathrm{supp}(\sigma^{-1}) = \mathrm{supp}(\sigma)$

Illustrons cette propriété pour notre exemple.
$\sigma^{-1} = (2\ \ 4)^{-1} \circ (1\ \ 3\ \ 6)^{-1} = (2\ \ 4) \circ (1\ \ 6\ \ 3)$
On constate que $\mathrm{supp}(\sigma^{-1}) = \{1; 2; 3; 4; 6\} = \mathrm{supp}(\sigma)$

Preuve.
Soient $\sigma \in S_n$ et $i \in [\![1; n]\!]$
$i \notin \mathrm{supp}(\sigma) \Leftrightarrow \sigma(i) = i \Leftrightarrow \sigma^{-1}\big(\sigma(i)\big) = \sigma^{-1}(i) \Leftrightarrow i = \sigma^{-1}(i) \Leftrightarrow i \notin \mathrm{supp}(\sigma^{-1})$.
On a donc $[\![1; n]\!] \setminus \mathrm{supp}(\sigma) = [\![1; n]\!] \setminus \mathrm{supp}(\sigma^{-1})$.
Par passage au complémentaire, $\mathrm{supp}(\sigma^{-1}) = \mathrm{supp}(\sigma)$.

### **1.5.6.** Les transpositions engendrent $S_n$

→ Lemme. Soit $f = (a_1 \quad a_2 \ \ .. \quad a_p)$ un p-cycle.
Alors : $(a_1 \quad a_2 \ \ .. \quad a_p) = (a_1 \quad a_2)\ o\ (a_2 \quad a_3)\ o\ \ ..o\ (a_{p-1} \quad a_p)$

On vérifie aisément ce lemme. On remarque d'abord que le support de ces deux permutations est inclus dans $\{a_1\ ;..\, a_p\}$. On calcule ensuite l'image de $a_i$ pour $i \in [\![1; p-1]\!]$, et enfin l'image de $a_p$ et on vérifie que les résultats sont identiques pour chacune de ces deux permutations.
Tout $p-$ cycle se décompose donc en produit de $p-1$ transpositions.

→ Propriété. Le groupe symétrique $S_n$ est engendré par les transpositions, c'est-à-dire que toute permutation se décompose en composée -appelée par abus de langage produit- de transpositions.

Ce produit n'est pas unique, mais on admet que la parité du nombre de transpositions figurant dans le produit est indépendante de la décomposition en produit de transpositions effectuée.
On parle alors de **permutation paire** ou **impaire**.

Preuve de la propriété.
Puisque toute permutation se décompose en produit de cycles à supports disjoints, et que tout $p-$ cycle se décompose quant à lui en produit de $p-1$ permutations, le résultat est immédiat.

→ Illustration dans notre exemple. $\sigma = (1\ \ 3\ \ 6) \circ (2\ \ 4) = (1\ \ 3) \circ (3\ \ 6) \circ (2\ \ 4)$

### **1.5.7.** Signature

→ On définit ensuite la **signature** d'une permutation $\sigma \in S_n$ , notée $\varepsilon$, par :

$$\varepsilon : S_n \to \{-1\,;1\} \quad \sigma \longmapsto \varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \text{ est paire} \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ est impaire} \end{cases}$$

On admet que $\varepsilon$ est un morphisme de groupes : $(S_n, o, id) \to (\{-1; 1\}, \times, 1)$.

La signature d'un 2-cycle est donc égale à $-1$.

*La propriété qui suit va nous être très utile pour la suite.*

→ **Propriété. La signature d'un p-cycle est donc $(-1)^{p-1}$**

Preuve.
Soit $f = (a_1 \quad a_2 \ \ .. \quad a_p)$ un p-cycle.
D'après le lemme du **1.5.6.**, $f = (a_1 \quad a_2)\ o\ (a_2 \quad a_3)\ o\ \ ..o\ (a_{p-1} \quad a_p)$.
Comme $\varepsilon$ est un morphisme,

$$\varepsilon(f) = \varepsilon(a_1 \quad a_2) \times \varepsilon(a_2 \quad a_3) \times .. \times \varepsilon(a_{p-1} \quad a_p) = (-1)^{p-1}$$

→ Illustration dans notre exemple.
$\sigma = (1\ \ 3\ \ 6) \circ (2\ \ 4)$
La signature de $\sigma$ est donc $\varepsilon\ (\sigma) = (-1)^{3-1} \times (-1)^{2-1} = -1$. $\sigma$ est donc une permutation impaire.

On peut retrouver la signature $\sigma$ à l'aide d'une décomposition en produit de transpositions :
$\sigma = (1\ \ 3) \circ (3\ \ 6) \circ (2\ \ 4)$ . $\sigma$ est un produit de 3 transpositions, donc $\sigma$ est impaire.

*Après avoir introduit les notions mathématiques, entrons dans l'analyse du cube et de sa résolution.*

→ Pour cela, nous allons montrer, dans les paragraphes **1.6., 1.7.** et **1.8.,** que l'ensemble $X/\mathcal{R}$ possède douze éléments. Ceci signifie que la configuration obtenue par remontage au tournevis vous donne une chance sur douze de pouvoir ensuite réordonner le cube à l'aide de mouvements légaux, à supposer que vous connaissiez la méthode de résolution.

→ Pour prouver cette propriété, nous allons montrer que tout mouvement élémentaire agit sur les configurations en laissant trois **invariants** : un invariant sur les positions des arêtes et des sommets, l'autre sur les orientations des sommets, le troisième sur les orientations des arêtes.

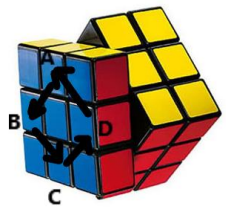
→ L'étude précise de ces invariants nous permettra de reconnaître si une configuration est légale ou non, et est le point de départ pour appréhender algébriquement le cube d'ordre $4 \times 4 \times 4$ que nous évoquerons très brièvement dans la partie **2.**

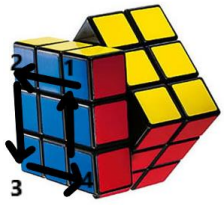
## 1.6. Tout mouvement élémentaire possède trois invariants

### 1.6.1. Propriété

La signature d'un mouvement légal est égale à 1.

→ Illustration dans le cas particulier du mouvement de la face de gauche.




Le mouvement élémentaire de la face de gauche (d'un quart de tour dans le sens direct) modifie à la fois :

(*) Les positions de 4 arêtes dans un $4-$ cycle de type $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix}$

L'arête $A$ va sur le site arête $B$, etc…

(**) Les positions de 4 sommets dans un $4-$ cycle de type $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Les autres sommets et arêtes restent invariants.

→ De façon analogue, chacun des six mouvements élémentaires induit une permutation à la fois des sommets et des arêtes, donc un élément $\sigma \circ \tau$, où $\sigma$ et $\tau$ sont deux 4-cycles à supports disjoints de $S_{20}$, l'un agissant sur les positions des cubes sommets et laissant fixes les positions des arêtes, et l'autre l'inverse. Puisqu'un 4-cycle a pour signature $(-1)^{4-1} = -1$, la permutation induite par ce mouvement élémentaire a donc pour signature $(-1)^2 = 1$.

→ La signature d'une configuration, que l'on peut définir comme étant la signature de la permutation dans $S_{20}$ induite par le mouvement -légal ou non- permettant de passer du but à cette configuration est donc inchangée lorsqu'on lui applique un mouvement légal quelconque, puisqu'elle est inchangée lorsqu'on lui applique un mouvement élémentaire.

→ En particulier, il n'est donc pas possible de transposer deux éléments par un mouvement légal en laissant les positions des autres éléments inchangées, la signature d'un tel mouvement étant égale à $-1$.

→ Remarquons au passage qu'il est en outre impossible d'arriver au but en partant du but à l'aide d'un nombre impair de mouvements élémentaires, puisque les permutations des positions induites sur les sommets et les arêtes sont alors toutes deux de signature $-1$.

De plus, nous allons prouver que chaque mouvement élémentaire a deux autres invariants, l'un sur la somme des orientations des sommets modulo 3, l'autre sur la somme des orientations des arêtes modulo 2. La difficulté est de définir une modification d'orientation d'un sommet, puis d'une arête lorsqu'il ou elle n'est pas positionnée correctement.

### **1.6.2.** Propriété

La somme des orientations des sommets est invariante modulo 3.

On appellera **pans** les 3 faces d'un sommet et les 2 faces d'une arête.

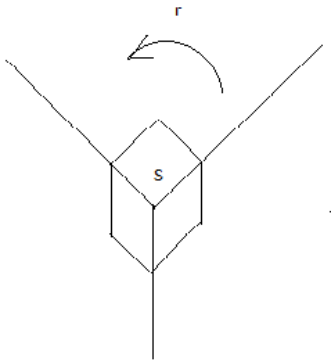
#### **1.6.2.1.** Orientation d'un sommet

→ Définissons l'orientation d'un sommet. Pour cela, identifions les couleurs des faces opposées en nous imaginant légèrement daltonien.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Face | Gauche : Bleue | Devant : Rouge | Haut : Jaune |
| Face opposée | Droite : Verte | Derrière : Orange | Bas : Blanc |
| Couleur vue | Latéral : Mer | Frontal : Sang | Horizontal : Pâle |

Chaque sommet $S$ a donc les trois couleurs Mer, Sang et Pâle.

→ Prenons une configuration du Rubik's (légale ou non) et un sommet $S$ de cette configuration. En se plaçant ensuite « en face de la pointe de ce sommet » $S$, on peut définir **l'orientation de ce sommet** comme étant le nombre de tiers de tours dans le sens direct parcourus pour passer de la face pâle du Rubik's au pan pâle du sommet. Il suffit pour cela d'imaginer la rotation $r$ d'axe orienté $\overrightarrow{OS}$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, où $O$ est le centre du cube. L'orientation d'un sommet est donc un nombre entier égal à 0, 1 ou 2 modulo 3 selon ce nombre de tiers de tours parcourus.



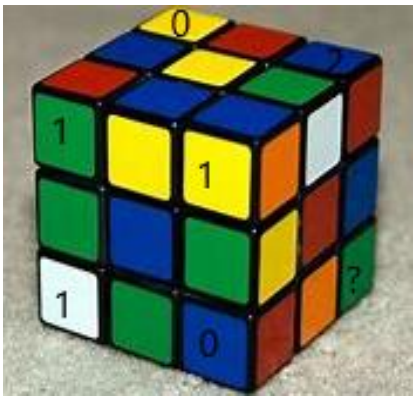
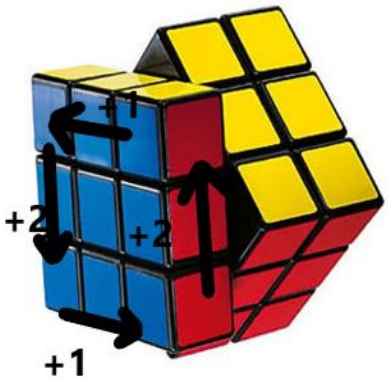



Illustration.
Face de gauche : mer
Face de devant : sang (regarder les centres)
Face du haut : pâle
Le sommet gauche-devant-haut (dont les pans sont jaune-orange-bleu, donc vu comme pâle-sang-mer) est tourné d'**un** tiers de tour dans le sens direct après la bonne orientation, qui serait réalisée si sa face pâle était en haut, donc son orientation est **1**.

**1.6.2.2.** Propriété

Après action d'un mouvement élémentaire quelconque, la somme des orientations des sommets est invariante modulo 3.

→ Illustration dans le cas particulier du mouvement de la face gauche.




Le sommet gauche-devant-bas (dont les pans sont rouge-bleu-blanc vus comme sang-mer-pâle) change d'altitude par le mouvement élémentaire de rotation de la face gauche. Le pan pâle se retrouve sur la face sang après rotation. Il est tourné sur lui-même de **deux** tiers de tour par rapport à sa bonne orientation, donc son orientation- qui était nulle- a augmenté de **2**.

On vérifie aisément que les modifications des orientations des 3 autres sommets sont respectivement 1, 2 et 1.

On vérifie également que ces modifications d'orientation sont indépendantes de la configuration initiale.

En examinant la figure ci-dessus, on constate donc que le mouvement élémentaire de la face de gauche entraîne une modification des orientations des quatre sommets de cette face. Ces quatre sommets ont été déplacés. Cette modification des orientations est de la forme (**2** ; 1 ; 2 ; 1), les « 2 » correspondant à un changement d'altitude, et les « 1 » aux sommets qui ont conservé la même altitude. La somme de ces changements est égale à 0 modulo 3.

→ Et le résultat est analogue pour chacun des trois autres mouvements élémentaires verticaux. Quant aux deux mouvements élémentaires horizontaux, ils n'entraînent pas de modification des orientations, c'est-à-dire que la modification des orientations est de la forme (0 ; 0 ; 0 ; 0). Et il est facile de se convaincre que ces modifications d'orientations sont indépendantes de la configuration de départ, car deux rotations de même axe commutent. On en déduit que dans $X_l$, la somme des orientations des sommets est toujours égale à 0 modulo 3, puisqu'elle l'est au départ dans la configuration $b$.

### 1.6.3. Propriété

Après action d'un mouvement élémentaire quelconque, la somme des orientations des arêtes est invariante modulo 2.

#### 1.6.3.1. Définition des orientations des arêtes

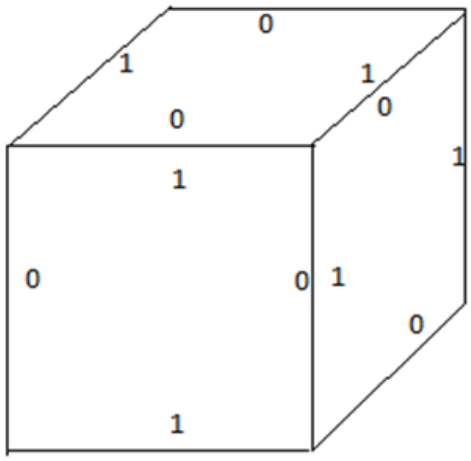
(*) Initialisation.
On attribue l'orientation 0 à une arête **bien positionnée** et bien orientée, c'est-à-dire orientée de la même façon que l'arête du but.
On attribue l'orientation 1 à une arête **bien positionnée** et mal orientée.
On attribue donc le chiffre 0 à toutes orientations des arêtes de la configuration but.

(**) Modification des orientations après un mouvement élémentaire.
On modifie l'orientation de chacune des 4 arêtes affectées par un mouvement élémentaire, c'est-à-dire qu'on lui attribue la valeur 1 si sa valeur était 0 et réciproquement. On laisse inchangées les orientations des 8 autres arêtes. On définit ainsi **l'orientation d'une arête d'une configuration légale** obtenue via une succession de mouvements élémentaires par ces modifications successives.

L'orientation d'une arête est donc :
Egale à 0 si elle a été affectée, à partir du but, par un nombre pair de mouvements élémentaires.
Egale à 1 si elle a été affectée par un nombre impair de mouvements élémentaires.

La question est maintenant d'établir, en voyant une configuration donnée obtenue à partir du but par une succession de mouvements élémentaires, la parité du nombre de mouvements élémentaires ayant affecté cette arête. Nous allons montrer que c'est possible, grâce au diagramme d'orientation des arêtes qui suit.

#### 1.6.3.2. Comment lire ce diagramme d'orientation des arêtes ?




→ Il faut imaginer que notre cube est éclairé dans chacune des 6 directions orthogonales aux faces par ces 24 chiffres qui restent fixes. Ce diagramme est conçu pour que deux sites arêtes **voisins**, c'est-à-dire tels que l'on puisse passer de l'un à l'autre par un mouvement élémentaire ou son inverse, aient des orientations inversées. Examiner le diagramme pour bien s'en convaincre. Ce qui signifie qu'après chaque mouvement élémentaire, chaque arête déplacée est éclairée de façon inversée, c'est-à-dire que le 0 et 1 sont permutés sur les couleurs de chacun de ses deux pans avant et après déplacement.

→ Comme à chaque mouvement élémentaire, chaque arête déplacée change d'orientation, cet éclairage nous donne exactement ce que nous désirons, à savoir l'orientation de chaque arête d'une configuration quelconque. L'orientation est égale à 0 si cette arête est éclairée par les mêmes chiffres sur les mêmes pans que lorsqu'elle est bien positionnée et bien orientée ; et cela signifie que cette arête a été affectée par un nombre pair de mouvements élémentaires. L'orientation est en revanche égale à 1 si cette arête a été affectée par un nombre impair de mouvements élémentaires. Nous avons donc trouvé une orientation intrinsèque de chacune des arêtes d'une configuration quelconque, c'est-à-dire indépendante des mouvements élémentaires ayant mené à cette configuration.

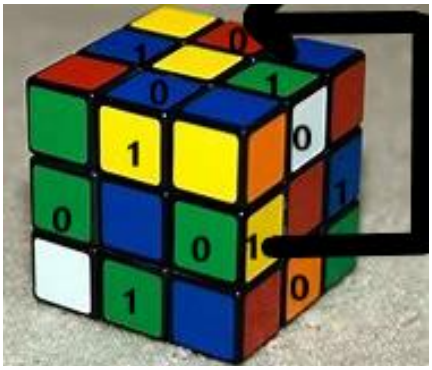


Illustration.
L'arête jaune-vert est mal orientée car le pan jaune est marqué d'un « 1 » alors que son site destination est occupée par le pan rouge marqué d'un « 0 ». Il faudra donc lui appliquer un nombre impair de mouvements élémentaires pour qu'elle arrive au but.

**1.6.3.3.** Invariant modulo 2 des sommes des orientations des petits cubes-arêtes

→ Comme 4 arêtes sont déplacées pour chaque mouvement élémentaire, la somme des orientations des 12 arêtes est invariante modulo 2 par chaque mouvement élémentaire.

→ La somme des orientations des 12 arêtes est donc invariante modulo 2 sous l'action de $H$. Comme la somme des orientations des arêtes est nulle pour le but $b$, si une configuration est légale, alors la somme des orientations de ses arêtes est nulle modulo 2.

**1.6.3.4.** Orbite-déplacement d'une arête. Anneau de Möbius et anneau à deux faces

*Prenons le temps d'interpréter le diagramme d'orientation des arêtes pour mieux comprendre le principe des orientations des arêtes.*

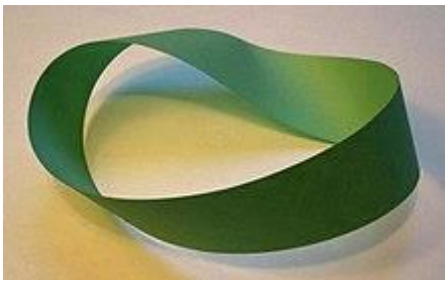
→ Chaque arête peut prendre douze positions possibles et deux orientations possibles, et une manipulation élémentaire du Rubik's cube nous convainc aisément que ces $12 \times 2 = 24$ dispositions (c'est-à-dire positions et orientations) peuvent être atteintes. Définissons **l'orbite-déplacement** d'une arête sous l'action de $H$ par l'action du groupe $H$ sur la restriction du but à l'ensemble $A$ des cubes arêtes. Cette action est bien définie puisque $H$ envoie un cube arête sur un autre.

Et l'orbite-déplacement d'un cube arête sous cette action est de cardinal 24. En d'autres termes, l'action de $H$ sur les cubes arêtes est transitive (toutes les positions et les orientations sont atteignables).

→ En revanche, si nous mettons en mouvement une arête à l'aide d'un nombre pair de mouvements élémentaires, d'après le diagramme d'orientation des arêtes expliqué ci-dessus, l'orientation de cette arête sera inchangée. Ce qui revient à dire que si l'on fait faire à cette arête une « balade spéciale » en l'arrêtant chaque fois qu'on lui a fait parcourir deux mouvements élémentaires, les endroits d'arrêt de ce petit cube-arête seront contenus dans une orbite-

déplacement de cardinal 12. Par contraposition, il faut un nombre impair de mouvements élémentaires affectant la position d'un cube arête pour modifier l'orientation de celui-ci tout en le laissant à sa place.

→ Ce type de remarque permet de mieux analyser les mouvements du Rubik's cube : lorsque l'on vient de découvrir un mouvement contenant beaucoup d'invariants, donc potentiellement intéressant car visuellement simple à appréhender, on se demande si l'orbite-déplacement d'un petit cube est ce qu'on appellera de façon imagée un **ruban à deux faces** ou bien un **ruban de Möbius**. Ici, c'est un **ruban à deux faces** si on impose au nombre de mouvements élémentaires affectant ce petit cube arête d'être un nombre pair. Et on reste toujours sur la même face de cet anneau. Nous illustrerons cette notion dans le paragraphe qui suit.



Le ruban de Möbius n'a qu'une seule face. Un mobile en mouvement décrit les deux orientations possibles.

### **1.6.4.** Conséquence. $G\backslash H$ possède au moins 12 éléments

Faisons le bilan de **1.6.1., 1.6.2. et 1.6.3.**

#### **1.6.4.1.** Notation d'un mouvement

Numérotons les sommets de 1 à 8 et les arêtes de 1 à 12.
D'après ce qui précède, un mouvement « au tournevis » peut se décomposer de façon unique par un quadruplet $(\sigma\,;\tau\,;a\,;b)\in S_8\times S_{12}\times\{0\,;1\,;2\}^8\times\{0\,;1\}^{12}$, où :
$\sigma$ est la permutation sur les sommets induite par le mouvement.
$\tau$ est la permutation sur les arêtes induite par le mouvement.
$a=(a^{(1)}\,;a^{(2)}\,;..;a^{(8)})$ où chaque $a_i$ représente la modification d'orientation du sommet $i$.
$b=(b^{(1)}\,;b^{(2)}\,;..;b^{(12)})$ où chaque $b_i$ représente la modification d'orientation de l'arête $i$.

#### **1.6.4.2.** Les douze classes d'équivalence

L'ensemble $G$ des mouvements du cube « au tournevis » est partitionné par un certain nombre de classes à droite pour $H$, la relation d'équivalence étant : $g\,\mathcal{R}\,g' \;\Leftrightarrow\; \exists h\in H,\; h(g)=g'$.
Et l'une de ces classes d'équivalence est $H$, la classe des mouvements légaux.

Nous allons définir trois mouvements qui, d'après les points **1.6.1.**, **1.6.2.** et **1.6.3.**, sont **illégaux**.
→ Soit $t$ la transposition des positions des deux arêtes haut-devant et haut-droit qui conserve toutes les orientations.
→ Soit $s$ le tiers de tour du sommet haut-devant-droit dans le sens direct.
→ Soit $a$ la modification de l'orientation de l'arête devant-droit.
Ces 3 mouvements sont illégaux, c'est-à-dire qu'ils n'appartiennent pas à $H$, car aucun de ces trois mouvements ne respecte à la fois les trois invariants que possède tout élément de $H$.

Propriété.
$G\backslash H$ a au moins douze éléments, qui sont les classes d'équivalence

$$H.t^i.a^j.s^k\ , i \in \{0\,;1\}, j \in \{0\,;1\}\ , k \in \{0\,;1\,;2\}$$

Preuve.
Supposons qu'il y ait un élément commun aux ensembles $H.t^i.a^j.s^k$ et $H.t^{i'}.a^{j'}.s^{k'}$ pour $i \in \{0\,;1\},\ j \in \{0\,;1\}\ , k \in \{0\,;1\,;2\}$ et $i' \in \{0\,;1\},\ j' \in \{0\,;1\}\ , k' \in \{0\,;1\,;2\}$. On en déduit, pour des raisons de signature, que $i = i'$ .Ensuite, comme $a$ ne modifie pas la somme des orientations des sommets, on a $s^k = s^{k'}$ donc $k = k'$. Pour des raisons analogues, $j = j'$.
Ces classes sont disjointes deux à deux, donc distinctes deux à deux. Il y en a $2 \times 2 \times 3 = 12$.

Bilan. $\mathrm{card}(G\backslash H) \geq 12$

## 1.7. Groupe cyclique

### 1.7.1. Définition

Soit $G$ un groupe.
On dit que $G$ est un **groupe cyclique** s'il peut être engendré par un seul élément, c'est-à-dire s'il existe $g \in G$ tel que $G = < g >$.
Remarque. Par convention, $g^{-j} := (g^{-1})^j$

### 1.7.2. Propriété et définition

Si $< g >$ est fini, alors :
(**i**) Il existe alors un entier $k$ strictement positif tel que $g^k = e$.
(**ii**) On appelle **ordre de $g$** , noté $\mathbf{ord}(g)$, le plus petit entier $k$ strictement positif vérifiant l'égalité ci-dessus. On écrit $b = \mathrm{ord}(g)$
(**iii**) $\forall (i,j) \in ([\![1\,;b]\!])^2 \quad i \neq j \ \Rightarrow g^i \ \neq \ g^j \qquad (*)$
$\forall a \in \mathbb{Z}, \exists!\, r \in [\![0\,;b-1]\!],\ g^a = g^r \qquad (**)$
(**iv**) L'ordre de l'élément $g$ est le cardinal du groupe cyclique engendré par $g$.

Preuve.
(**i**) Puisque $g \in G$ et que $G$ est un groupe, l'ensemble $\{g^n\ , n \in \mathbb{Z}\}$ est inclus dans $G$. Comme $< g >$ est fini, il existe deux entiers distincts $i$ et $j$ tels que $g^i = g^j$. Par symétrie, on peut supposer que $i > j$.
Comme $g^j \in G$ et que $G$ est un groupe, $g^j$ admet un unique inverse et cet inverse est $g^{-j}$.
Multiplions l'égalité précédente par $g^{-j}$ à gauche : $g^{-j}g^i = g^{-j}g^j$ d'où $g^{i-j} = e$.
Il existe donc un entier $k$ avec $k = i - j > 0$ tel que $g^k = e$.

(**iii**)$(*)$ Supposons qu'au contraire il existe $(i,j) \in ([\![1\,;b]\!])^2$ avec $i \neq j$ et $g^i = g^j$
Par symétrie, on peut supposer que $i > j$. On tire alors, en multipliant l'égalité ci-dessus par $g^{-j}$ : $g^{i-j} = e$ avec $1 \leq\ i - j < b$ . Mais, comme $b$ est le plus petit entier strictement positif $k$ tel que $g^k = e$, on aboutit à une contradiction.

$(**)$ Soit $a \in \mathbb{Z}$. Effectuons la division euclidienne de $a$ par $b$.
$\exists!\,(q,r) \in \mathbb{Z}^2,\ a = b.q + r$ et $0 \leq r < b$.

On a donc $g^a = g^{bq+r} = \left(g^b\right)^q . g^r = g^r$.

(**iv**) L'ordre de $g$, à savoir l'entier $b$, est donc, d'après $(*)$ et $(**)$, égal au nombre d'éléments du groupe $< g >$ engendré par $g$.

Illustration. $\alpha$ , la clé 1 (voir **1.8.4.**).
**Ruban à deux faces pour les arêtes** (2 orbites-déplacement, l'une pour chacun des pans jaunes, l'autre pour chacun des pans verts, rouges et bleus)
$\alpha$ est la composée d'un 3-cycle sur les arêtes et de 3 modifications d'orientation des sommets. L'orbite-déplacement de l'arête de pans jaune-vert est clairement de cardinal 3. Il y a deux orbites pour les 6 pans de ces 3 arêtes : les pans jaunes restent sur la face jaune, les pans vert, rouge et bleu restent sur les faces verte, rouge et bleue. L'orbite-déplacement d'un petit cube est donc un ruban à deux faces. $\alpha$ est d'ordre 3 car, par ailleurs, les sommets tournent sur eux-mêmes d'un tiers de tour.

### 1.7.3. Propriété

Si $g^a = e$ avec $a \in \mathbb{Z}$, alors l'ordre de $g$ divise $a$.

Preuve.
Effectuons la division euclidienne de $a$ par $b$ , $b$ étant l'ordre de $g$.
$a = b.q + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < b$.
$e = g^a = g^{bq+r} = \left(g^b\right)^q . g^r = e^q . g^r$ donc $g^r = e$, d'où $r = 0$ et $b$ divise $a$.

## 1.8. Trois clés pour résoudre le cube

*Nous allons exhiber* 3 *mouvements, que l'on appellera* ***clés****, qui engendrent* $H$*, du moins si on les combine avec des rotations du cube et des mouvements élémentaires. Ces* 3 *générateurs sont visuellement simples, c'est-à-dire qu'ils comportent beaucoup de petits cubes invariants.*

### 1.8.1. Notation

Notons les 6 mouvements élémentaires des faces du cube dans le sens direct par les lettres $d, g, h, b, f, a$, où

$d \rightarrow$ droite $\quad g \rightarrow$ gauche $\quad h \rightarrow$ haut $\quad b \rightarrow$ bas $\quad f \rightarrow$ face $\quad a \rightarrow$ arrière

### 1.8.2. Les 3 clés

→ **Attention**. Pour plus de facilité pratique, on note les composées à l'envers. Ainsi $gh \coloneqq h \circ g$

→ Etudions les mouvements qui laissent invariants la face du haut et la couronne de mi-hauteur invariante.
Une idée très simple pour créer des tels mouvements est la suivante :
On descend le sommet haut-devant-droit. On le décale par un mouvement de la face du bas. On remonte la face de droite, puis on remet ce sommet à sa place et bien orienté par un autre chemin.

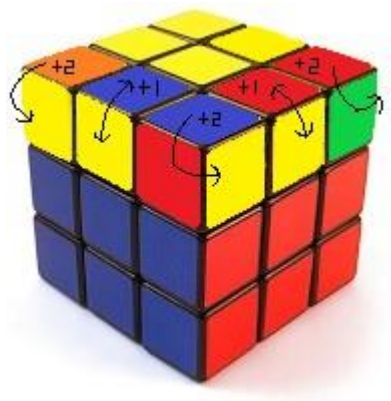
→ Voici 3 clés construites en exploitant cette idée :
Clé 1. $\alpha = dbd^{-1}bdb^2d^{-1}b^2$

Clé 2. $\beta = dbd^{-1}b^{-1}d^{-1}fdf^{-1}b$
Clé 3. $\gamma = dbd^{-1}bf^2gfg^{-1}fb^2$

### **1.8.3.** La clé 3 règle tous les problèmes d'orientation

Pour obtenir la même figure que celle-ci-dessous, partir avec la face blanche en haut, la face rouge à droite et la face verte devant soi.

→ La clé 3 laisse inchangées les positions de tous les petits cubes.
Elevée au carré, elle modifie les orientations de 3 sommets consécutifs et laisse le reste invariant.
Elevée au cube, elle modifie les orientations de 2 arêtes consécutives et laisse le reste invariant.




Clé 3. $\gamma = dbd^{-1}bf^2gfg^{-1}fb^2$.
C'est la composée d'un nombre pair de mouvements élémentaires ou de leurs inverses -il y en a 12- donc sa signature sur les positions des sommets est $(-1)^{12} = 1$. Il en est de même pour les arêtes.
Les positions de tous les petits cubes sont invariantes par $\gamma$.
3 sommets sont tournés sur eux-mêmes de deux tiers de tours.
2 arêtes voient leur orientation inversée.
Il est facile de se convaincre que $\gamma$ est d'ordre 6.

→ La clé 3, appliquée plusieurs fois, nous permet donc d'orienter correctement tous nos sommets et arêtes. En effet, $\gamma^2$ ne fait rien d'autre que d'augmenter les orientations de 3 sommets voisins d'une unité et $\gamma^3$ ne fait rien d'autre que de modifier les orientations de 2 arêtes voisines. Pour se convaincre que cette clé 3 nous permet de régler tous les problèmes d'orientation, il suffit de manipuler un peu le cube et d'utiliser le **principe du parapluie**[5].

→ Si la configuration initiale est légale, la somme des orientations des sommets est congrue à 0 modulo 3 et la somme des orientations des arêtes est congrue à 0 modulo 2. On peut donc effectuer cette clé 3 à la fin, une fois que chacun des petits cubes est bien positionné.

### **1.8.4.** La clé 1 peut positionner les arêtes, une fois les sommets fixés.

Pour obtenir la même figure que celle-ci-dessous, partir avec la face blanche en haut, la face orange à droite et la face bleue devant soi puis retourner le cube pour voir les effets sur la face du bas.
→ La clé 1 permute 3 arêtes et modifie l'orientation de 3 sommets.

[5] Voir la vidéo de Mickaël Launay, « Le principe du parapluie », https://www.youtube.com/watch?v=xrxNhYNUzKI

Clé 1. $\alpha = dbd^{-1}bdb^2d^{-1}b^2$

C'est la composée d'un nombre pair de mouvements élémentaires ou inverses - il y en a 10- donc sa signature sur les positions des sommets est 1. Il en est de même pour sa signature sur les positions des arêtes.

$\alpha$ est d'ordre 3. Cette clé est pratique pour positionner les arêtes quand les sommets sont déjà bien positionnés.

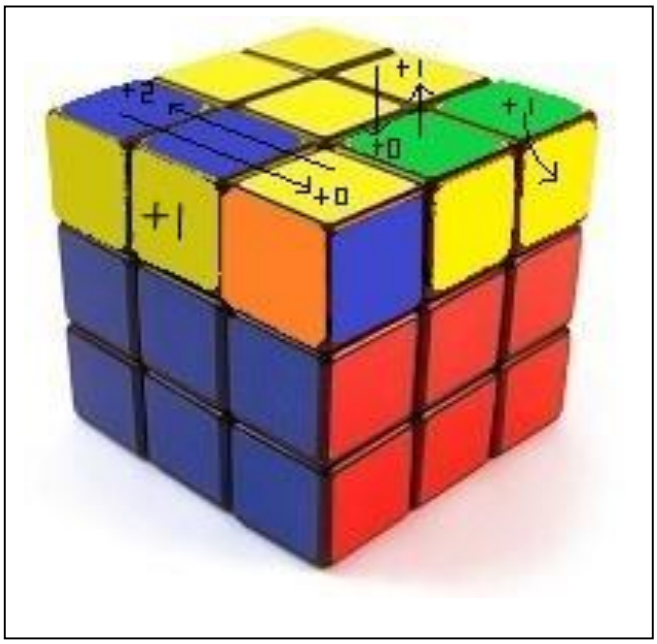
→ La clé 1, bien qu'ayant les deux signatures des permutations sur les sommets et les arêtes induites par le mouvement égales à 1, permet donc de terminer le positionnement des petits-cubes. En effet, si les sommets sont déjà bien placés, le mouvement-légal- qui permet d'arriver au but, noté $(\sigma\,;\tau\,;a\,;b)\,\epsilon\, S_8 \times\, S_{12} \times\, \{0,1,2\}^8 \times \{0,1\}^{12}$ vérifie $\varepsilon(\sigma) = 1$ donc $\varepsilon(\tau) = 1$.

*Il reste à trouver une clé efficace pour modifier les positions des sommets. Nous sommes amenés à résoudre un Rubik's cube* $2 \times 2 \times 2$.

### 1.8.5. La clé 2 permute deux sommets voisins

Pour obtenir la même figure que celle-ci-dessous, partir avec la face blanche en haut, la face rouge à droite et la face verte devant soi.

Clé 2. $\beta = dbd^{-1}b^{-1}d^{-1}fdf^{-1}b$




Notons cette clé 2 par un quadruplet $(\sigma, \tau, a, b)\,\epsilon\, S_8 \times\, S_{12} \times\, \{0\,;1\,;2\}^8 \times \{0\,;1\}^{12}$ comme défini au **1.6.4.1**.

$\sigma$ et $\tau$ sont deux $2-$cycles, respectivement de $S_8$ et de $S_{12}$. En particulier, $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau) = -1$, ce qui est normal car cette clé est composée d'un nombre impair de mouvements élémentaires.

Puisque les $2-$cycles engendrent $S_8$, cette clé nous permet donc de positionner les sommets. Mais en pratique, c'est long, car on préfère orienter ces sommets en même temps.

Cette clé est pratique pour rétablir une signature $1 \times 1$ lorsque l'on a une signature $(-1) \times (-1)$.

*Pour étudier l'ordre de cette clé, nous avons besoin d'un résultat intermédiaire.*

**1.8.5.1.** Lemme
Soit $(\sigma, \tau) \in S_n^2$. Si $\sigma$ et $\tau$ sont à supports disjoints, alors l'ordre de $\sigma \circ \tau$ est le ppcm des ordres de $\sigma$ et $\tau$.

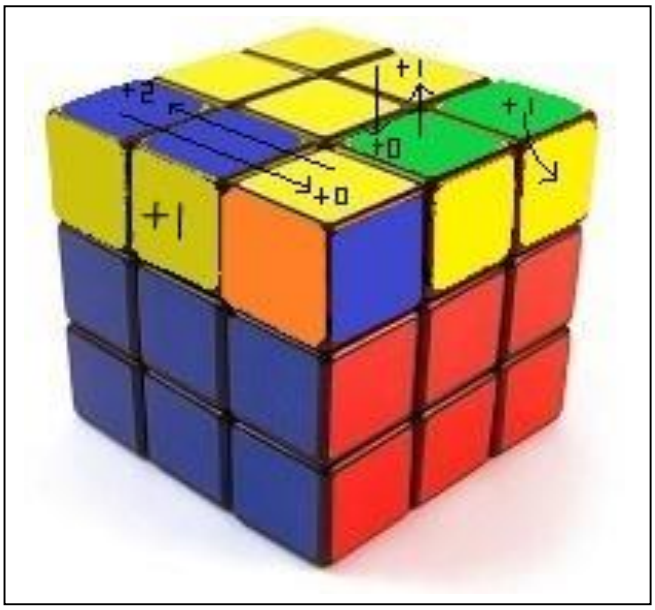
Preuve.
→ Soient $k$ et $l$ les ordres respectifs de $\sigma$ et $\tau$, et $m = \text{ppcm}(k, l)$.
Alors $m = k.k'$ et $m = l.l'$ avec $(k', l') \in \mathbb{N}^2$ et $\text{pgcd}(k', l') = 1$.
Comme $\sigma$ *et* $\tau$ sont à supports disjoints, ils commutent, donc
$(\sigma \circ \tau)^m = \sigma^m \circ \tau^m = (\sigma^k)^{k'} \circ (\tau^l)^{l'} = e$, d'où l'ordre de $\sigma \circ \tau$ divise $m$.

→ Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $(\sigma \circ \tau)^p = e$. Comme $\sigma$ et $\tau$ commutent, on en déduit que
$\sigma^p = \tau^{-p}$. Comme de plus $\text{supp}(\sigma^p) \subset \text{supp}(\sigma)$ et $\text{supp}(\tau^{-p}) = \text{supp}(\tau^p) \subset \text{supp}(\tau)$,
les permutations $\sigma^p$ et $\tau^{-p}$ sont à supports disjoints. On en déduit que $\sigma^p = \tau^{-p} = e$.
D'après la propriété du **1.7.4.** on en déduit donc que $k$ divise p et $l$ divise $p$ d'où
$m = \text{ppcm}(k, l)$ divise $p$.
En particulier, $m$ divise donc l'ordre de $\sigma \circ \tau$.

→ Bilan. Par divisibilité réciproque, l'ordre de $\sigma \circ \tau$ est donc égal à $m$.

*Nous pouvons reprendre l'étude de l'ordre de la clé 2. Nous allons la décomposer en produit de mouvements à supports disjoints. Ces mouvements commutent, donc l'ordre de cette clé est le* ppcm *des ordres des mouvements qui la composent.*

**1.8.5.2.** Analyse de la clé 2




Clé 2. $\beta = dbd^{-1}b^{-1}d^{-1}fdf^{-1}b$
L'analyse de $\beta$ est un peu plus complexe que celles de $\alpha$ et $\gamma$.
→ $\beta$ est la composée de 9 mouvements élémentaires ou inverses, donc les signatures de ses permutations induites sur les sommets et arêtes sont toutes deux égales à $-1$.

→ $\beta$ se décompose en 4 mouvements à supports disjoints (donc qui commutent)

(*) Les arêtes aux pans orange-jaune et jaune-vert sont permutées et prennent les 4 dispositions possibles lorsque l'on fait opérer $< \beta >$ sur le but $b$. L'orbite-déplacement de chacun de ces 4 pans sous l'action de $< \beta >$ est d'ordre 4. Il s'agit d'un ruban de Möbius d'ordre 4.
(**) Le sommet aux pans vert-jaune-orange tourne sur lui-même dans une rotation d'ordre 3.
(***) L'arête jaune-bleu tourne sur elle-même par une symétrie d'ordre 2.
(****) Les sommets au pans bleu-jaune-rouge et bleu-jaune-orange sont permutés et l'orientation du sommet bleu-blanc-orange augmente de 2. L'orbite de chacun des 6 pans précités sous l'action de $< \beta >$ est d'ordre 6. Il s'agit d'un ruban de Möbius d'ordre 6.

→ L'ordre de $\beta$ est donc le ppcm de 4, 3, 2 et 6, c'est-à-dire 12.

### **1.8.6.** Bilan

→ En utilisant successivement les clés 2, 1 puis 3, on se convainc aisément, en manipulant un peu le cube et en utilisant le **principe du parapluie** que l'on peut résoudre n'importe quelle position légale à l'aide de ces 3 clés.

→ Les 3 seules contraintes sont donc les invariants exposés au **1.6.1, 1.6.2** et **1.6.3.**
On en déduit que $\text{card}(G \backslash H) = \frac{\text{card}(G)}{\text{card}(H)} = 12$.

→ Ces 3 clés $\alpha, \beta$ et $\gamma$ suffisent donc à résoudre le cube. Mais l'intérêt de la manipulation du Rubik's consiste à trouver les vôtres et à les combiner dans un ordre adéquat afin qu'elles vous permettent de résoudre le cube efficacement.

C'est dans cet esprit de recherche de clés, puis en analysant ces clés en les annotant après avoir photographié leur impact sur le cube résolu (voir encadrés au **1.8.**), que vous trouverez vous-même des méthodes pour résoudre le cube. Bien-sûr, il est préférable de rechercher en priorité des clés **visuellement simples**, c'est-à-dire qui **dérangent peu**, ou, en d'autres termes, qui ont beaucoup d'**invariants**.

### **1.8.7.** $H$ est distingué dans $G$

Théorème.
$H$ est distingué dans $G$, c'est-à-dire :

$$\forall g \in G, \forall h \in H, g^{-1}.h.g \in H$$

Preuve.
La preuve de cette propriété repose sur les trois invariants vus précédemment.
**(i)** Soit $g \in G$ et $h \in H$.
Notons les deux éléments $g$ et $h$ par deux quadruplets comme défini au **1.6.4.1**.
$g = (\sigma_g, \tau_g, a_g, b_g) \in S_8 \times S_{12} \times \{0\,;1\,;2\}^8 \times \{0\,;1\}^{12}$
$h = (\sigma_h, \tau_h, a_h, b_h) \in S_8 \times S_{12} \times \{0\,;1\,;2\}^8 \times \{0\,;1\}^{12}$
On a alors $g^{-1} = (\sigma_{g^{-1}}, \tau_{g^{-1}}, a_{g^{-1}}, b_{g^{-1}}) = (\sigma_g^{-1}, \tau_g^{-1}, a_{g^{-1}}, b_{g^{-1}})$
Notons enfin $g^{-1}.h.g = (\sigma, \tau, a, b)$

**(ii)** Nous savons que les éléments de $H$ sont caractérisés par :

$$k = (\sigma_k, \tau_k, a_k, b_k) \in H \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon(\sigma_k).\varepsilon(\tau_k) = 1 \\ \sum_{i=1}^{8} a_k^{(i)} \equiv 0[3] \\ \sum_{i=1}^{12} b_k^{(i)} \equiv 0[2] \end{cases} \text{ en notant } a_k := \left(a_k^{(1)}, \dots a_k^{(8)}\right) \text{et } b_k := \left(b_k^{(1)}, \dots b_k^{(12)}\right)$$

**(iii)** Raisonnons sur les positions

$\sigma = \sigma_g^{-1} \circ \sigma_h \circ \sigma_g$ ; puisque la signature $\varepsilon$ est un morphisme,

$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma_g)^{-1}.\varepsilon(\sigma_h).\varepsilon(\sigma_g) = \varepsilon(\sigma_h)$. De même, $\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\tau_h)$

Comme $h \in H$, $\varepsilon(\sigma_h).\varepsilon(\tau_h) = 1$ donc $\varepsilon(\sigma).\varepsilon(\tau) = 1$

**(iv)** Raisonnons sur les orientations

Puisque d'une part $g$ et $g^{-1}$ sont inverses, et que d'autre part $\sigma$ et $\tau$ sont bijectives :

$$\sum_{i=1}^{8} a_{g^{-1}}^{(i)} \equiv \sum_{i=1}^{8} -a_g^{(\sigma(i))} \equiv -\sum_{j=1}^{8} a_g^{(j)}[3] \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{12} b_{g^{-1}}^{(i)} \equiv -\sum_{i=1}^{12} b_g^{\tau(i)} \equiv -\sum_{j=1}^{12} b_g^{(j)}[2]$$

donc en sommant le nombre de tiers de tours (respectivement le nombre de demi-tours) nécessaires pour effectuer la composée $g^{-1}.h.g$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{8} a^{(i)} \equiv 0 \ [3] \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{12} b^{(i)} \equiv 0 \ [2]$$

**(v)** Bilan

$g^{-1}.h.g \in H$. On conclut que $H$ est donc distingué dans $G$.

### **1.8.8.** Explicitons $X/\mathcal{R}$

D'après **1.8.6.**, $\text{card}(G \backslash H) = 12$.

Notons $t'^{i}.a'^{j}.s'^{k}$ les configurations respectives obtenues lorsqu'on applique au cube résolu les mouvements respectifs définis au **1.6.4.** , à savoir :

$$t^i.a^j.s^k \text{ , où } i \in \{0\,;1\}, j \in \{0\,;1\}\text{ , } k \in \{0\,;1\,;2\}$$

A toute configuration $z \in X$, non nécessairement légale, on associe le triplet $(i_0, j_0, k_0) \in \{0\,;1\} \times \{0\,;1\} \times \{0\,;1\,;2\}$, où :

→ $i_0 = 0$ si la permutation induite par la configuration est paire, $i_0 = 1$ si elle est impaire.

→ $j_0$ est égal à la somme des orientations modulo 2 des arêtes de la configuration.

→ $k_0$ est égal à la somme des orientations modulo 3 des sommets de la configuration.

$z$ s'obtient à l'aide d'une et une seule de ces 12 configurations par des mouvements légaux, à savoir à l'aide de $t'^{i_0}.a'^{j_0}.s'^{k_0}$, donc $\text{card}(X/\mathcal{R}) = 12$.

L'une des 12 classes d'équivalence est $X_l = H(b)$, à savoir la classe des configurations légales.
Et voici donc nos 12 univers parallèles :

$$X/\mathcal{R} = \{H(t'^{i}.a'^{j}.s'^{k})\text{ , } i \in \{0\,;1\}, j \in \{0\,;1\}\text{ , } k \in \{0\,;1\,;2\}\}$$

## 1.9. Pourquoi la résolution du Rubik's est-elle relativement difficile ?

*On pourrait penser que mettre en place* 8 *sommets et* 12 *arêtes est relativement aisé. Néanmoins, des difficultés apparaissent ; ce sont essentiellement les suivantes* :

### 1.9.1. L'ensemble $X_l$ est « grand »

On a en effet :

$$\text{card}\ (X)\ =\ 3^8\ \times 8!\ \times 2^{12}\ \times 12!\ \simeq 5{,}2\ \times 10^{20}$$

En divisant par 12, on obtient donc card $(X_l)\ \simeq 3{,}6\ \times 10^{19}$.

### 1.9.2. Il faut éviter les dérangements…

→ Ensuite, chaque mouvement élémentaire « **dérange** » quatre arêtes et quatre sommets. L'objectif pour un humain – contrairement à un ordinateur qui, lui, est insensible aux modifications visuelles importantes - est donc de trouver des composées de ces mouvements élémentaires qui soient visuellement simples, c'est-à-dire qui dérangent peu. On recherche aussi des composées de mouvements élémentaires qui laissent invariants soit les sommets, soit les arêtes, afin de pouvoir traiter séparément le problème des arêtes et des sommets.

→ Nous avons vu comment résoudre le cube. Il vient ensuite le problème de la rapidité de la résolution. Trouver des clés visuellement simples permet d'avancer sûrement vers le but, mais ne permet pas de résoudre le Rubik's de la manière la plus rapide possible. Afin d'aborder le problème de la minimisation du nombre de mouvements élémentaires nécessaires pour arriver au but, nous allons à présent modéliser le Rubik's cube sous la forme d'un graphe non orienté.

## 1.10. Structure de graphe non orienté et non pondéré

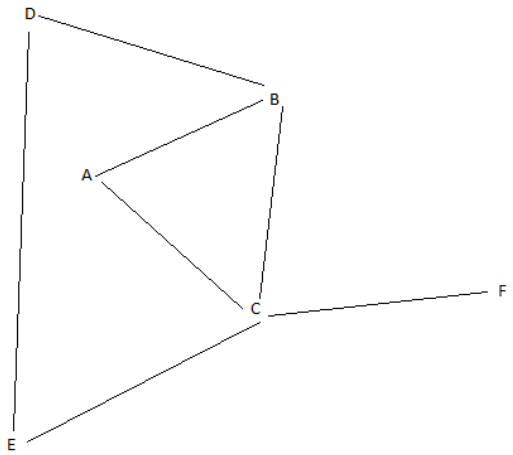
### 1.10.1. Définitions

#### 1.10.1.1. Graphe non orienté et non pondéré

Définition.
Un **graphe $\mathcal{G}$ non orienté et non pondéré** est un ensemble, noté $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ où $\mathcal{S}$ est un ensemble fini de **sommets** et $\mathcal{A}$ un ensemble d'**arêtes**, où chaque arête est un ensemble à 2 éléments de $\mathcal{S}$.
On dit alors que deux éléments d'une même arête sont **voisins**.

Exemple. Sur le graphe ci-dessous, il y a 6 sommets et 7 arêtes.

$$\mathcal{S} = \{A, B, C, D, E, F, G\}\ \text{ et }\ \mathcal{A} = \{\ \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, E\}, \{C, F\}, \{D, E\}\ \}$$



**1.10.1.2.** Graphe complet

Définition.
On dit qu'un graphe est **complet** si, pour tout couple de sommets, il existe une suite finie d'arêtes appelée **chemin** qui relie ces deux sommets.

### **1.10.2.** Structure de graphe du Rubik's cube

→ Dans le Rubik's cube, l'ensemble $X_l$ des configurations légales du cube peut être considéré comme l'ensemble des **sommets du graphe**.
On appelle **coup**, un des 6 mouvements élémentaires ou un de ses inverses.
Une **arête** est alors un ensemble à deux éléments de $X_l$, noté $\{x_0\,;x_1\}$, tel que la configuration $x_1$ puisse être atteinte à partir de $x_0$ en 1 **coup**, c'est-à-dire qu'il existe un coup $\sigma$ tel que $\sigma(x_0) = x_1$.
On dit alors que $x_0$ et $x_1$ sont **voisins**.

En itérant le procédé, on définit un **chemin** de $x_0$ à $x_n$ en tant que **suite finie** $(x_i)_{0\,\leq i\leq n}$ telle que pour tout $i\ \in [\![0;n-1]\!]$, $x_i$ et $x_{i+1}$ sont voisins. On dit que ce chemin est de longueur $n$.

→ On définit donc le graphe du Rubik's cube de la manière suivante :

$$\mathcal{S}\ = X_l \ \text{ et } \ \mathcal{A} = \{\{x\,;\sigma(x)\}\,,\text{ où } \sigma \text{ ou } \sigma^{-1} \text{ est un mouvement élémentaire et } x \in X_l\}$$

Remarquons que chaque sommet possède 12 voisins. Le but du jeu est donc de trouver, à partir de n'importe quel sommet, un chemin menant de ce sommet au sommet $b$ qui correspond à la configuration but.

### **1.10.3.** Distance associée à un graphe non orienté et non pondéré complet

**1.10.3.1.** Définition

→ Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ un graphe non orienté et non pondéré complet.
Soit $(x, y) \in \mathcal{S}^2$. Puisque $\mathcal{G}$ est complet, il existe au moins une suite finie d'arêtes $(\{x_k\,;x_{k+1}\})_{0\leq k\leq n-1} \in \mathcal{A}^n$ vérifiant $\quad x_0 = x$ et $x_n = y$

→ Puisque toute configuration légale est accessible depuis le but, par transitivité, pour chaque couple de configurations $(x, y) \in {X_l}^2$ il existe au moins un chemin qui mène de $x$ à $y$. Parmi ces chemins, il en existe au moins un de longueur minimale. On appelle cette longueur minimale la **distance de $x$ à $y$** ou encore le **nombre de coups minimal nécessaires pour aller de $x$ à $y$**. On note cette distance $d(x, y)$.

→ On définit ainsi une application $d : {X_l}^2 \to \mathbb{R}_+$ que l'on appelle distance associée au graphe. On vérifie aisément que cette application est une distance au sens métrique du terme, c'est-à-dire qu'elle vérifie les 3 propriétés suivantes :

(i) **Séparabilité** $\quad \forall\,(x, y) \in X_l^2, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(ii) **Symétrie** $\quad \forall\,(x, y) \in X_l^2, \quad d(x, y) = d(y, x)$
(iii) **Inégalité triangulaire** $\quad \forall\,(x, y, z) \in X_l^3, \quad d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

On dit alors que $(X_l, d)$ est un **espace métrique**.

### **1.10.4.** Boule de centre $x$ et de rayon $r$

Pour $r \in \mathbb{N}$ et $x \in X$, on définit $\boldsymbol{\mathcal{B}}\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}) = \{y \in X, d(x, y) \leq r\}$ appelée **boule de centre $x$ et de rayon $r$**. $\mathcal{B}(x, r)$ représente l'ensemble des configurations atteignables à partir de la configuration $x$ en moins de $r$ coups. On peut la voir comme la **profondeur de calcul d'un joueur** capable de repérer toute configuration située à moins de $r$ coups de la configuration $x$.

### **1.10.5.** God's numbers, graphes des coups et des supercoups

*L'objectif ultime du jeu est alors de déterminer un chemin minimal de $x$ à $b$.*

→ La question qui en découle est la suivante : que vaut max $\{d(x,b), x \in X_l\}$ ?
Ce nombre est appelé **GOD'S NUMBER**, en référence au nombre de coups que mettrait le Dieu du Rubik's Cube à le résoudre si on lui donnait une configuration de départ parmi celles qui sont les plus défavorables. En juillet 2010, Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson et John Dethridge ont trouvé la réponse[6]. Elle est très surprenante :

| Nombre de sommets du graphe | Nombre de voisins d'un sommet | GOD'S NUMBER |
|---|---|---|
| $3{,}6 \times 10^{19}$ | 12 | 26 |

Seulement 26 coups…

→ De plus, si l'on définit un **supercoup élémentaire** en tant que mouvement élémentaire élevé à une puissance quelconque, c'est-à-dire une rotation d'une face sur elle-même d'un, de deux ou de trois quarts de tours dans le sens direct laissant le reste du cube invariant, on obtient un nouveau graphe dans lequel chaque sommet possède non pas 12 mais 18 voisins. Et le GOD'S NUMBER est cette fois-ci égal à 20.

→ En pratique, avec des méthodes classiques, il faut une bonne centaine de supercoups élémentaires pour résoudre le cube. Les meilleurs spécialistes du Rubik's cube, quant à eux, le résolvent en une soixantaine de supercoups élémentaires lorsqu'ils cherchent à minimiser le temps de résolution, et il leur faut une bonne quarantaine de supercoups élémentaires lorsqu'ils prennent le temps de réfléchir. Les méthodes les plus efficaces (Pétrus[7], Fridrich…) ne résolvent pas le cube par **couches** car ce procédé présente l'inconvénient de défaire les couches puis de les refaire. Un algorithme optimal peut théoriquement le faire en 20 supercoups élémentaires, quelle que soit la configuration de départ … Comment tendre vers cet objectif ? Le paragraphe **1.11.** a pour but de tenter de poser la problématique.

## 1.11. Vers des algorithmes de résolution du Rubik's cube par ordinateur

*La résolution optimale du cube est un problème complexe au vu du nombre important de sommets du graphe $\mathcal{G} = (X_l, \mathcal{A})$. D'où l'intérêt de construire un sous-graphe de ce graphe.*

### **1.11.1.** Graphe pondéré non orienté complet. Sous-espace métrique

**1.11.1.1.** Définition
On appelle **graphe pondéré** non orienté un ensemble $\mathcal{G}' = (\mathcal{S}', \mathcal{A}', p)$, où :
$(*)$ $\mathcal{S}'$ est un ensemble de points appelés **sommets**.
$(**)$ $\mathcal{A}'$ un ensemble d'ensembles de la forme $\{x, y\}$ avec $(x, y) \in \mathcal{S}'^2$ et $x \neq y$ appelés **arêtes**.
$(***)$ $p : \mathcal{A}' \to \mathbb{R}^+$ est une application appelée **pondération**.

L'idée est ici de construire, à partir du graphe $\mathcal{G} = (X_l, \mathcal{A})$, un **sous-graphe pondéré** $\mathcal{G}' = (\mathcal{S}', \mathcal{A}', p)$ tel que : $\mathcal{S}' \subset X_l$ et $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, où la pondération $p$ est définie sur $\mathcal{A}'$ par :
$\forall \{x, y\} \in \mathcal{A}',\ p(\{x, y\}) = d(x, y)$

[6] https://cube20.org/
[7] https://www.francocube.com/deadalnix/petrus

→ En langage imagé :

$\mathcal{S}'$ représente l'ensemble des **villes** d'un pays

$\mathcal{A}'$ l'ensemble de chacun des **tronçons** de routes, c'est-à-dire l'ensemble des routes reliant directement une ville à une autre, c'est-à-dire sans passer par aucune ville étape.

$p$ associe à chaque tronçon sa longueur (tous les tronçons sont à double sens).

→ Définition. De plus, le graphe $\mathcal{G}'$ est dit **complet** si pour tout ensemble de 2 sommets de $\mathcal{G}'$, il existe une suite finie d'arêtes appelée **chemin** qui relie ces deux sommets, c'est-à-dire que deux villes quelconques sont accessibles par une suite finie de tronçons.

**1.11.1.2.** Distance associée à un graphe

Lorsque le graphe pondéré est non orienté et complet, on peut alors définir la **distance associée au graphe** $d'$: $S'^2 \to \mathbb{R}_+$

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \min\{\sum_{i=0}^{n-1} p(\{x_i, x_{i+1}\}) \text{ , où } \{x_i, x_{i+1}\} \in \mathcal{A}' \text{ , } x_0 = x \text{ , } x_n = y \text{ et } n > 0\} & \text{si } x \neq y. \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Cette application donne, pour tout $(x,y) \in S'^2$, la longueur du chemin le plus court reliant $x$ à $y$ par des tronçons. On vérifie que l'application $d'$: $S'^2 \to \mathbb{R}_+$ est une distance au sens métrique du terme, donc $(\mathcal{S}', d')$ est un espace métrique appelé espace métrique associé au graphe $\mathcal{G}'$.

## **1.11.2.** Algorithme de Dijkstra ?

*Reprenons la terminologie et les notations du paragraphe précédent.*

→ Le but de l'algorithme de Dijkstra[8] est de déterminer, dans un pays où certaines villes sont reliées par des tronçons dont on connait la longueur, la distance minimale qui relie chacune des villes à une ville fixée.
Cet algorithme a donc pour but de déterminer, pour tout $x_0 \in S'$ fixé, pour tout $y \in S'$, la valeur de $d'(x_0, y)$. Il s'agit donc de déterminer la fonction $\delta : S' \to \mathbb{R}_+ \; y \mapsto d'(x_0, y)$

Voici un premier lien qui permet de comprendre le principe de l'algorithme :
http://www.csi.uottawa.ca/~flocchin/CSI2510/CSI2510SP.pdf
Voici un second lien qui permet de comprendre le fonctionnement de cet algorithme à travers quelques exemples concrets :
https://www.normalesup.org/~dconduche/informatique/PT/Cours/Dijkstra.pdf

→ L'algorithme de Dijkstra est surtout adapté au cas des **graphes pondérés**.
Et cet algorithme est compliqué quand le nombre de sommets est grand…
C'est pourquoi nous pouvons être tentés de construire un sous-graphe pondéré $\mathcal{G}' = (X_l', \mathcal{A}', d')$ tel que l'ensemble des sommets de $X_l'$ soit contenu dans l'ensemble des sommets de $X_l$.

→ Notre tentative de simplification du graphe peut se voir d'une façon imagée. Une grenouille habite dans votre lac rempli de nénuphars et vous désirez en enlever le plus possible. Seulement, la Société de Protection des Grenouilles vous a à l'œil. Connaissant la longueur maximale du saut de la grenouille, comment conserver le minimum de nénuphars afin que votre grenouille puisse

[8] Edsger Dijkstra (1930-2002), mathématicien et informaticien néerlandais.

regagner l'arbre situé sur la berge sans perte de temps, peu importe sa position de départ dans le lac ? Ce nombre minimum, appelé nombre de recouvrement, est défini dans le paragraphe qui suit.

### **1.11.3.** Nombre de recouvrement

→ L'idée de l'algorithme qui sera esquissé au **1.11.4.** est analogue à celle-ci, qui a été développée par Paul Dorbec dans sa thèse « empilement et recouvrement en théorie des graphes »[9].

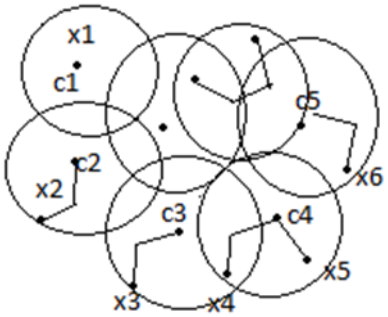
Imaginons une population $X = \{x_1; x_2; ..; x_n\}$ qui vit dans des cases en bois. On identifie les habitants et le lieu où ils habitent. En cas d'incendie, le but est de rejoindre le point « $b$ » au plus vite. Comment faire ?

1er temps. Pour chacun des habitants $x_j$ des cases, il y a un point d'abri provisoire $c_i = c_{k_j}$ supposé connu par l'habitant $x_j$, accessible en moins de $r$ minutes.

2nd temps. Des navettes évacuent ensuite les habitants depuis les abris provisoires jusqu'au point $b$.

Idéalement, ces points $c_i$ doivent être sur le chemin d'un des trajets de temps minimal parmi ceux qui mènent de $x_j$ à b.

→ Illustration d'un recouvrement avec des boules de rayon $r = 2$.




ci : centres des boules de rayon 2.
xi : sommets du graphe.
Les segments représentent les arêtes du graphe et relient les sommets voisins.

Dans un premier temps, il faut donc pouvoir recouvrir le graphe des cases en bois par un ensemble de boules de rayon $r$ et de centres $c_i$. Le nombre minimal $s$ de points d'abri nécessaires est appelé **nombre de recouvrement** du graphe. On aura donc $\mathcal{C} = \{c_1; c_2; ..; c_s\}$. Et on espère que $s$ sera nettement inférieur à $n$.

Dans un second temps, pour chaque $c_i$, une navette amène les habitants au point « b » en faisant au plus vite. Pour simplifier l'algorithme, l'idéal est de faire en sorte que cette navette passe ensuite par d'autres $c_l$ sans pour autant perdre de temps, ceci afin de réduire la taille du graphe initial en se ramenant à un ensemble de sommets égal à l'ensemble des centres $\mathcal{C} = \{c_i\ , i \in [\![1; s]\!]\}$ muni de la distance induite.

### **1.11.4.** Profondeur de calcul dans le graphe et recouvrement par des boules de rayon $r$

#### **1.11.4.1.** Notre plan d'attaque

La beauté est souvent cachée dans la partie immergée de l'iceberg, si l'on peut dire. Ce qu'il y a de fascinant et de très esthétique ici, c'est que les positions et orientations de vingt petits cubes engendrent un ensemble de positions de l'ordre de $10^{20}$. Et pourtant, puisque le god's number est

[9] Paul Dorbec, *Empilements et recouvrements dans les graphes*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2007.

20, cet ensemble est contenu dans une boule de rayon 20. Par ailleurs, la triple apparition du nombre 20 est-elle une pure coïncidence … ?

Posséder une profondeur de calcul de 20 supercoups élémentaires, c'est-à-dire visualiser l'arbre d'analyse contenant $18^{20}$ feuilles, permettrait de résoudre le cube au plus vite : peine perdue !

Une profondeur de calcul de 5 supercoups élémentaires paraît nettement plus raisonnable : cela implique que lorsqu'on est à 5 coups ou moins d'une configuration à atteindre, on soit capable de la repérer et de s'y rendre au plus court. Pour résumer la situation en termes imagés, nous nous trouvons donc dans une forêt dans laquelle 18 sentiers d'un kilomètre partent de chaque point de bifurcation et possédons un radar qui nous avertit lorsque nous nous trouvons à moins de 5 kilomètres du but. Et nous savons que nous sommes à moins de 20 kilomètres du but. Du fait du nombre important de bifurcations offertes en chaque point comparé à une faible distance maximale au but, l'arbre d'analyse s'apparente donc à un **buisson touffu**.

Avoir une profondeur d'analyse de 5 supercoups est difficile pour un humain, mais beaucoup moins pour un ordinateur. Et ensuite ?

**1.11.4.2**. Construction du sous-graphe $\mathcal{G}' = (\mathcal{C}, d')$, où $d'$ est la distance induite.

L'idée est de recouvrir l'ensemble des sommets $X_l$ de graphe $\mathcal{G}$ à l'aide de boules de rayon 5.

(**a**) On suppose alors connus :
(**i**) L'ensemble $\mathcal{C}$ des centres des boules de ce recouvrement.
(**ii**) La connaissance de l'application $\delta : \left| \begin{array}{l} \mathcal{C} \to \mathbb{N} \\ c \mapsto d(c,b) \end{array} \right.$.
(**iii**) Un **guidage direct**, à partir des centres de ces boules, au plus court vers le but – c'est-à-dire un chemin minimal reliant chacun des éléments de $\mathcal{C}$ et $b$.

(**b**) Le problème pourrait se résoudre si l'on disposait de ces 3 éléments. En partant d'une configuration $x \in X$, nous pourrions alors trouver un trajet minimal en respectant les étapes suivantes :
(**i**) Repérage de l'ensemble des centres des boules visibles lorsque la configuration est $x$.
Dans un premier temps, trouver l'ensemble $E_x = B(x,5) \cap \mathcal{C} = \{ c \in \mathcal{C}, d(x,c) \leq 5 \}$.

(**ii**) Choix d'un centre qui minimise le trajet de $x$ à $b$.
On pose ensuite $m = \min\{ d(x,c) + \delta(c), c \in E_x \}$.
On choisit alors $c_0$ tel que $d(x,c_0) + \delta(c_0) = m$.
Notons qu'il se peut que l'on ait ici $d(x,b) < m$, si le centre $c_0$ n'est pas « sur la route directe de $x$ vers le but ».

(**iii**) Déplacement en $c_0$, puis on termine à l'aide du guidage au plus court de $c_0$ à $b$.
Ceci permet de rechercher un chemin minimal dans le graphe pondéré $\mathcal{G}'$ qui comporte -beaucoup- moins de sommets que $\mathcal{G}$. Encore faut-il que l'on puisse trouver un chemin minimal découpé en sous-trajets de longueurs inférieures à 5, et dont les étapes soient des éléments de $\mathcal{C}$.

(**c**) Cet algorithme pose des difficultés pratiques. En effet :
(**i**) Il faut effectuer un recouvrement de l'espace avec des boules de rayon 5, ce qui semble très ardu car elles seraient très nombreuses.

(**ii**) Il faut ensuite, pour tout sommet $x$, qu'il existe un élément de $E_x$ qui soit sur la route directe entre $x$ et $b$, c'est-à-dire : $\forall x \in X_l$ , $\exists c \in E_x$ , $\delta(x) = d(x,c) + \delta(c)$.
(**iii**) Il nous faut enfin trouver un guidage direct, de préférence en passant par d'autres centres via des parcours d'au maximum 5 unités.

Cet algorithme semble difficilement applicable au Rubik's cube au vu du nombre trop important d'éléments de $X_l$. Il est cependant applicable au Taquin à retournement que nous allons étudier dans la partie 2. Et nous allons décrire un algorithme pour ce jeu grâce à ce plan d'attaque.

Evidemment, si la profondeur de calcul augmente, la taille des boules de recouvrement augmente, et il faut moins de boules pour recouvrir l'espace, donc un ensemble de centres de cardinal moindre. Il y a environ 250 milliards de configurations situées à 10 supercoups élémentaires du but. Imaginons que l'on puisse les répertorier toutes dans une base de données. Si un ordinateur arrive à développer une profondeur de calcul à un rayon de 10 supercoups élémentaires, il trouvera le chemin optimal. Mais il existe certainement des algorithmes bien plus efficaces …

Après avoir modélisé structurellement le Rubik's cube et posé la problématique de sa résolution optimale, nous allons étudier exhaustivement le cas de son petit frère, le Taquin à retournement, qui ressemble fort à un Rubik's à deux faces.

# 2. Etude d'un Rubik's cube plat : le Taquin à retournement, petit frère du Rubik's cube

## 2.1. Présentation de l'objet. Codage d'une configuration par une matrice binaire

### 2.1.1. Présentation du Taquin

→ Imaginons que l'on ne s'autorise, à partir du Rubik's cube réalisé, à effectuer que des demi-tours. Le sous-groupe des mouvements légaux est alors le sous-groupe $H'$ engendré par les 6 éléments $d^2, g^2, b^2, h^2, f^2, a^2$ . On note $H' = < d^2, g^2, b^2, h^2, f^2, a^2 >$

→ Imaginons aussi que l'on regarde ce Rubik's en vue de dessus. Il nous reste uniquement 2 couleurs, celles des faces du dessus (bleues, marquées par 0) et du dessous (rouges, marquées I).

→ Enfin, pour que le centre ne présente pas toujours la même couleur, on autorise les demi-tours des 2 **lattes** centrales, c'est-à-dire des deux lignes ou colonnes centrales.

→ Exemple. En partant du but $b$, qui est la configuration où chacune des 9 cases est bleue, voici l'action de la composée des trois coups $C_1 L_2 L_3$ effectués dans cet ordre.

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

but b

| | | |
|---|---|---|
| I | 0 | 0 |
| I | 0 | 0 |
| I | 0 | 0 |

↑ $C_1$

$L_2$ →

| | | |
|---|---|---|
| I | 0 | 0 |
| I | I | 0 |
| I | 0 | 0 |

$L_3$ →

| | | |
|---|---|---|
| I | 0 | 0 |
| I | I | 0 |
| I | I | 0 |

→ Remarque. Si l'on considère le groupe engendré par les mouvements légaux du Rubik's cube et par les trois rotations de 180° dont les axes passent par les centres des trois faces opposées, le groupe des mouvements du Taquin est donc un sous-groupe de ce groupe.

### 2.1.2. Codage du Taquin

→ Partons d'un tableau 3 × 3. On peint la face du dessus en bleue et on inscrit le chiffre 0 au centre de chacune de ses neuf cases, et on peint de la face du dessous en inscrivant le chiffre I de façon analogue. Le but du jeu est de ne faire apparaître que des zéros.

Il y a donc six mouvements possibles de retournement de lattes, que l'on appellera **mouvements élémentaires** ou **coups**, que l'on notera comme au **2.1.1.** $(L_1), (L_2), (L_3), (C_1), (C_2), (C_3)$

→ Récapitulons pour bien comprendre l'action d'un mouvement. A partir de la configuration de gauche de l'encadré ci-dessous, on décide de retourner la ligne 2, notée $(L_2)$.

On a retourné la latte $L_2$ en la faisant pivoter de 180° autour de l'axe vertical qui coupe le carré en deux parties égales.

Configuration avant le retournement de $(L_2)$ Configuration après le retournement de $(L_2)$

| | | |
|---|---|---|
| 0 | I | 0 |
| 0 | 0 | I |
| I | I | 0 |

$L_2 \rightarrow$

| | | |
|---|---|---|
| 0 | I | 0 |
| 0 | I | I |
| I | I | 0 |

La partie de la « latte » $L_2$ qui était cachée devient visible et inversement. De plus, les cases milieu-gauche et milieu-droit ont été permutées.

→ Parmi les neuf cases du Taquin, il y a quatre cases sommet, quatre cases arête et une case centre.

→ On utilise les mêmes notations que pour le paragraphe **1.** On note ***H* le groupe engendré par ces six mouvements élémentaires**, ***G* le groupe des mouvements « au tournevis »**, en laissant toutefois les sommets dans les coins, les arêtes au bord et le centre au centre.
On appelle ***X* l'ensemble des configurations « au tournevis »**, ***b* le but**, $X_l$ **l'ensemble des configurations légales**, c'est-à-dire l'orbite de $b$ sous l'action de $H$.

## 2.2. Faites-vous la main

### 2.2.1. Etude de quelques configurations résolubles en deux ou en trois coups

CONFIG. 1 (2 coups)

| | | |
|---|---|---|
| I | 0 | 0 |
| I | I | 0 |
| I | 0 | 0 |

CONFIG. 2 (2 coups)

| | | |
|---|---|---|
| I | 0 | 0 |
| 0 | I | I |
| I | 0 | 0 |

CONFIG. 3 (2 coups)

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | I |
| I | I | I |

CONFIG. 4 (3 coups)

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | I |
| 0 | 0 | 0 |

CONFIG. 5 (3 coups)

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | I | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

CONFIG. 6 (3 coups)

| | | |
|---|---|---|
| 0 | I | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| I | 0 | I |

**2.2.2.** On sort de l'orbite (configurations. 8 et 9) : deux configurations NON résolubles

CONFIG. 7 (4 coups)

| | | |
|---|---|---|
| I | 0 | I |
| 0 | 0 | 0 |
| I | 0 | I |

CONFIG. 8

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | I |
| 0 | 0 | 0 |
| I | 0 | 0 |

CONFIG. 9

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | I |

Réponses :

**2.2.1.** Configurations résolubles :

**1**. $L_2 - C_1$ **2**. $C_1 - L_2$ **3**. $C_3 - L_3$

**4**. On se ramène à la configuration **3** : $L_3 - C_3 - L_3$

**5**. On se ramène à la configuration **1** : $C_1 - L_2 - C_1$

**6**. A rotation près, on se ramène à la configuration **2** : $C_2 - L_3 - C_2$

**7**. On se ramène à la configuration **1** après 2 coups : $L_2 - C_3 - L_2 - C_1$

**2.2.2.** Configurations non résolubles :

**8**. La configuration **8**, notée $x_8$ , n'est pas résoluble car les orientations des sommets ne peuvent être modifiées.

**9**. La configuration **9** ne peut être résolue : pour s'en convaincre, il suffit par exemple de prouver que, pour chaque coup, la somme des nombres inscrits dans les quatre cases sommet est invariante modulo 2. On peut aussi faire un raisonnement par l'absurde, car si la configuration **9** était résoluble, alors la configuration **8** le serait aussi, ce qui n'est pas le cas.

## 2.3. Opération du sous-groupe $H$ sur l'ensemble $X_l$

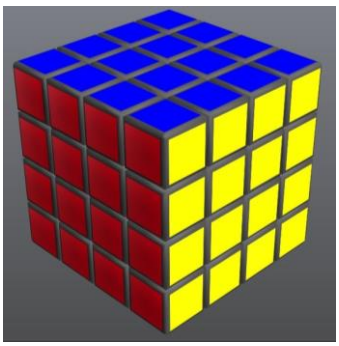
**2.3.1.** Présentation du problème

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | I |
| 0 | 0 | 0 |
| I | 0 | 0 |

→ L'orbite de la configuration **8** -présentée au **2.2.1.-** sous l'action du groupe $H$ semble être de cardinal strictement inférieur à celui d'une configuration résoluble : les sommets apparaissent « bloqués ». L'action de $H$ semble donner des orbites de cardinaux différents selon le choix des éléments de $X$. Il semble donc que $\text{card}(H(x_8)) < \text{card}(H(x_1))$. Comment est-ce possible ?

→ Pour comprendre ce phénomène, considérons le mouvement $L_1 - L_2 - L_3 - C_1 - C_2 - C_3$. Il s'agit de la rotation de l'espace d'axe vertical et d'angle $2 \times 90 = 180°$. Appelons-la $s$. Sur le Rubik's cube, son effet est visible : elle permute la face de gauche et la face de droite, ainsi que la face de devant et celle de derrière. Sur le Taquin, cette rotation de 180° a un effet, mais invisible lorsque la configuration est le but $b$.

Cela vient du fait que, contrairement au Rubik's cube $3 \times 3 \times 3$, il n'est pas nécessaire de mettre chaque élément à sa place. Le but n'est donc pas unique, et l'ensemble des configurations visibles est un ensemble quotient où chaque configuration visible est la classe d'équivalence d'un ensemble de configurations indiscernables entre elles. Bref, il apparaît un phénomène étrange : notre vue ne nous permet pas de distinguer deux configurations qui, si le carré avait été numéroté après avoir été peint, serait apparues différentes. Ce phénomène apparaît aussi dans le Rubik's $4 \times 4 \times 4$ car chacun des vingt-quatre centres possède quatre emplacements différents.



En revanche, le lecteur attentif se convaincra que deux arêtes voisines ne peuvent être permutées sans changer d'orientations dans le Rubik's $4 \times 4 \times 4$. L'orbite d'une arête est de cardinal 24 et non 48 sous l'action de l'ensemble des mouvements légaux.

→ Cette idée toute simple de permuter deux objets d'apparences identiques –comme par exemple deux tas de cartes–peut donner lieu à des tours de « magie » bluffants. Les limites de nos sens ont parfois été un frein à l'avancée des sciences… Comment appréhender l'invisible ?
Cela vient du fait que $H$ et $X_l$ ne sont pas en bijection. Pour mieux comprendre ce phénomène, introduisons de nouvelles notions.

### **2.3.2.** Stabilisateur et opération libre

On se place dans le cadre où un groupe $K$ opère sur un ensemble $X$.

**2.3.2.1.** Définition et propriété
Soit $x \in X$. On appelle **stabilisateur de $x$** sous l'action de $K$ l'ensemble

$$K_x = \{k \in K, k(x) = x\}.$$

On vérifie aisément que $K_x$ est un sous-groupe de $K$.

**2.3.2.2.** Définition
On dit qu'un groupe **$K$ opère librement sur un ensemble $X$** si tous les stabilisateurs sont triviaux, c'est-à-dire si : $\forall x \in X, K_x = \{e\}$.
Ce qui revient à dire que pour tout $x \in X$, l'application $\varphi_x : \left| \begin{array}{l} K \to X \\ k \mapsto k(x) \end{array} \right.$ est injective.

**2.3.2.3.** Définition
Enfin, on rappelle qu'un groupe **$K$ opère transitivement sur un ensemble $X$** si : $\forall x \in X, K(x) = X$.

Ceci revient à dire que pour tout $x \in X$, l'application $\varphi_x : \left| \begin{array}{l} K \to X \\ k \mapsto k(x) \end{array} \right.$ est surjective.

#### 2.3.2.4. Propriété fondamentale (formule des classes)

Pour tout $x$ appartenant à $X$, il existe une bijection entre $K/K_x$ et $K(x)$.

Preuve. Soit $x \in X$. Considérons $\varphi : \left| \begin{array}{l} K/K_x \to K(x) \\ g.K_x \mapsto g(x) \end{array} \right.$

→ Montrons tout d'abord que $\varphi$ est bien définie :
Soit $g' \in K$ tel que $g.K_x = g'.K_x$. On a alors : $g'^{-1}g \in K_x$ , donc $g'^{-1}g(x) = x$ d'où $g'(x) = g(x)$

→ Montrons que $\varphi$ est injective :
Supposons que $g(x) = g'(x)$.
Alors $g'^{-1}g(x) = x$ donc : $g'^{-1}g \in K_x$ d'où $g \in g'.K_x$ , et $g.K_x \subset g'.K_x$.
L'inclusion réciproque se prouve de même, d'où $g.K_x = g'.K_x$

→ Montrons que $\varphi$ est surjective :
Soit $y \in K(x)$. Il existe donc $g \in K$ tel que $g(x) = y$, d'où $y = \varphi(g.K_x)$ avec $g \in K$

Bilan. $\varphi$ réalise donc une bijection de $K/K_x$ dans $K(x)$

En particulier, si $K$ est fini : $\quad \mathrm{card}(K(x)) = \dfrac{\mathrm{card}(K)}{\mathrm{card}(K_x)}$

### 2.3.3. Cas du Rubik's cube et du Taquin

#### 2.3.3.1. Opération transitive

Dans les cas du Rubik's cube et du Taquin, par définition, $G$ opère transitivement sur $X$ et $H$ opère transitivement sur $X_l$.

On dispose donc dans les deux jeux, pour tout $x \in X$ une bijection entre $G/G_x$ et $X$.

On dispose aussi, pour tout $x \in X_l$, d'une bijection entre $H/H_x$ et $X_l$.

#### 2.3.3.2. Opération libre

##### 2.3.3.2.1. Cas du Rubik's cube

Dans le cas du Rubik's cube, tous les stabilisateurs sont alors réduits à l'identité, c'est-à-dire que l'opération est libre. $G$ est donc en bijection avec $X$ et $H$ est en bijection avec $X_l$.

En effet, tout élément de $G$ est noté par un quadruplet de $S_8 \times S_{12} \times \{0,1,2\}^8 \times \{0,1\}^{12}$
Comme il n'y a pas deux petits cubes identiques, tout déplacement entraîne une modification visuelle. Ceci signifie que les stabilisateurs sont réduits à l'identité.

##### 2.3.3.2.2. Cas du Taquin

Dans le cas du Taquin, l'opération n'est pas libre, puisque la permutation $s$, décrite plus tôt, appartient au stabilisateur de la configuration $b \in X_l$. On a donc $\mathrm{card}\,(H_b) \geq 2$. Mais attention : la permutation $s$ n'appartient pas au stabilisateur de tout élément $x \in X_l$. Elle n'a certes pas d'effet sur b, mais en a un sur les configurations qui ne sont pas symétriques par rapport au centre du Taquin.

Le subtil intérêt des groupes opérant sur un ensemble réside dans cette observation apparemment paradoxale. D'un côté, on voit les configurations, mais l'ensemble n'a pas directement de propriétés algébriques. D'un autre côté, on ne peut représenter par une figure les mouvements, mais l'ensemble de ces mouvements est muni d'une structure de groupe. Pour

appréhender entièrement l'ensemble $H$, il faut donc le faire opérer sur un ensemble $X'$ qui numérote les cases. Nous allons voir que cet ensemble $X'$ va mettre $H$ complètement en valeur, c'est-à-dire que l'ensemble $X$ sera tel que l'opération de $H$ sur $X'$ y sera libre.

Commençons donc par écrire des lettres ainsi que des numéros – les 9 cases au verso portant les mêmes lettres que leurs homologues au recto, suivies du numéro 1.

| | | |
|---|---|---|
| A,0 | G,0 | B,0 |
| E,0 | I,0 | F,0 |
| C,0 | H,0 | D,0 |

Le jeu serait alors différent car nous ne travaillons plus avec l'ensemble $X$. Le but, noté $b'$, est donc le tableau ci-dessus. Posons $X'_l = H(b')$.
Par définition de $X'_l$, $H$ opère transitivement sur $X_l'$.
L'opération est libre puisque les 18 cases sont deux à deux distinctes.

Bilan. $H$ est en bijection avec $X'_l$. Chaque élément $h$ de $H$ peut donc être représenté par $h(b')$.

## 2.4. Calcul du cardinal de $H$

Comme $H$ est en bijection avec $X_l'$, nous allons exprimer le cardinal de $H$ en fonction de celui de $X_l'$.

### 2.4.1. Exhibons des générateurs

→ Premièrement, on peut positionner chacun des sommets $A, B, C$ et $D$ sur n'importe quel site sommet, mais, puisque l'orbite de chaque sommet sous l'action de $H$ est un anneau à deux faces, il n'existe aucun moyen de modifier l'orientation d'un sommet en laissant sa position invariante. L'ensemble des configurations différentes des sommets est en bijection avec $S_4$. Il y a donc $4! = \mathbf{24}$ configurations pour les sommets.

→ Ensuite, on peut positionner les arêtes E et F sur n'importe quel site de ce sous ensemble d'une part, puis les arêtes $G$ et $H$ de la même façon, et ce sans modifier les sommets. Ceci donne **4** positions possibles des arêtes.

→ Enfin, le mouvement $L_3 - C_1 - L_3 - C_3 - L_1 - C_3$ donne le résultat suivant :

| | | |
|---|---|---|
| A,0 | G,1 | B,0 |
| E,1 | I,0 | F,0 |
| C,0 | H,0 | D,0 |

En utilisant les 3 autres mouvements obtenus à partir du mouvement précédemment décrit par rotations de 90°, 180° et 270°, on se convainc aisément que l'on peut orienter 3 arêtes à sa guise, ce qui permet d'obtenir $2^3 = \mathbf{8}$ orientations différentes pour les arêtes.

→ Bilan. Nous disposons donc d'au moins $24 \times 4 \times 8 = \mathbf{768}$ configurations distinctes.

*Et on ne peut aller plus loin.*

### 2.4.2. Des invariants limitent la taille de l'orbite

**2.4.2.1.** On ne peut passer de la première à la seconde configuration

| | | |
|---|---|---|
| A,0 | G,0 | B,0 |
| **E,0** | I,0 | F,0 |
| C,0 | H,0 | D,0 |

→

| | | |
|---|---|---|
| A,0 | G,0 | B,0 |
| **E,1** | I,0 | F,0 |
| C,0 | H,0 | D,0 |

→ Comme un mouvement élémentaire modifie d'une unité la somme des orientations, c'est-à-dire la somme des « 1 » inscrits sur une case, il est nécessaire que le nombre de mouvements élémentaires soit impair si l'on veut passer de la première à la seconde configuration.

→ Mais chaque mouvement élémentaire, du point de vue des lettres, est un 2-cycle, donc de signature $-1$. Il faut donc un nombre pair de mouvements élémentaires pour passer de la première à la deuxième configuration.

→ Bilan. Il est donc impossible de passer de la première à la seconde configuration.

**2.4.2.2.** Les passages entre ces deux configurations sont impossibles pour des raisons analogues

| | | |
|---|---|---|
| A,0 | G,0 | B,0 |
| E,0 | **I,0** | F,0 |
| C,0 | H,0 | D,0 |

→

| | | |
|---|---|---|
| A,0 | G,0 | B,0 |
| E,0 | **I,1** | F,0 |
| C,0 | H,0 | D,0 |

| | | |
|---|---|---|
| A,0 | G,0 | B,0 |
| E,0 | I,0 | F,0 |
| C,0 | H,0 | D,0 |

→

| | | |
|---|---|---|
| A,0 | G,0 | B,0 |
| E,0 | **I,1** | **F,1** |
| C,0 | H,0 | D,0 |

Dans ces deux cas, on raisonne sur la parité du nombre de mouvements élémentaires de la latte centrale horizontale ou verticale qui permettent de passer de la première à la seconde configuration. Il est nécessairement impair car l'orientation du centre a changé. Mais ceci implique nécessairement, du point de vue des positions des arêtes, une permutation de signature $-1$, ce qui aboutit à une absurdité.

### 2.4.3. Bilan

On a donc $\mathrm{card}(X_l') = 24 \times 2^2 \times 2^3 \times 1 = 4 \times 192$ ; par conséquent : $\mathrm{card}(H) = 4 \times 192$

## 2.5. Nombre de configurations possibles

*Revenons à notre jeu initial.*

### 2.5.1. Sommets

Cherchons d'abord le nombre de dispositions différentes pour les sommets.
D'après **2.2.1.**, une configuration n'est résoluble que si les 0 inscrits sur les sommets sont en nombre pair (configuration **9.**). On a vu de plus (configuration **8.**) que lorsqu'il y a exactement deux « zéros » sur les quatre sommets et que ces zéros sont disposés sur une même diagonale, la configuration n'est pas résoluble. On en déduit, par une vérification facile, qu'il existe exactement six dispositions pour les sommets, accessibles depuis le but. Ce sont les suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| 0 | | 0 |
| | | |
| 0 | | 0 |

| | | |
|---|---|---|
| I | | I |
| | | |
| I | | I |

| | | |
|---|---|---|
| 0 | | 0 |
| | | |
| I | | I |

| | | |
|---|---|---|
| 0 | | I |
| | | |
| 0 | | I |

| | | |
|---|---|---|
| I | | 0 |
| | | |
| I | | 0 |

| | | |
|---|---|---|
| I | | I |
| | | |
| 0 | | 0 |

### 2.5.2. Arêtes

Ensuite, comme la configuration **4.** est résoluble, il est facile de se convaincre que l'on peut orienter les arêtes de n'importe quelle façon.

### 2.5.3. Centre

On peut orienter aussi le centre de deux façons différentes, car la configuration **5** est résoluble.

### 2.5.4. Bilan

Il y a donc card $(X_l) = 6 \times 2^5 = 192$ configurations légales.

### 2.5.5. Cardinal du stabilisateur $H_x$

Soit $x \in X_l$. D'après **2.4.3**.et **2.5.4**., $\text{card}(H) = 4 \times 192$, $\text{card}(X_l) = 192$ et $\text{card}(H/H_x) = \text{card}(X_l)$. On en déduit que :

$$\forall x \in X_l, \qquad \text{card}(H_x) = 4.$$

### 2.5.6. Test de légalité

Un test de légalité simple, si on note une configuration $A \in X$ par une matrice binaire :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in M_3(\{0,1\})$$

On a la propriété suivante, facile à tester algorithmiquement :

$$A \in X_l \Leftrightarrow (a_{11} + a_{13} + a_{31} + a_{33} \equiv 0\ [2] \text{ et } a_{11}.a_{33} + a_{13}.a_{31} \equiv 0\ [2])$$

En effet, d'après **2.5.1**., il y a uniquement deux contraintes :

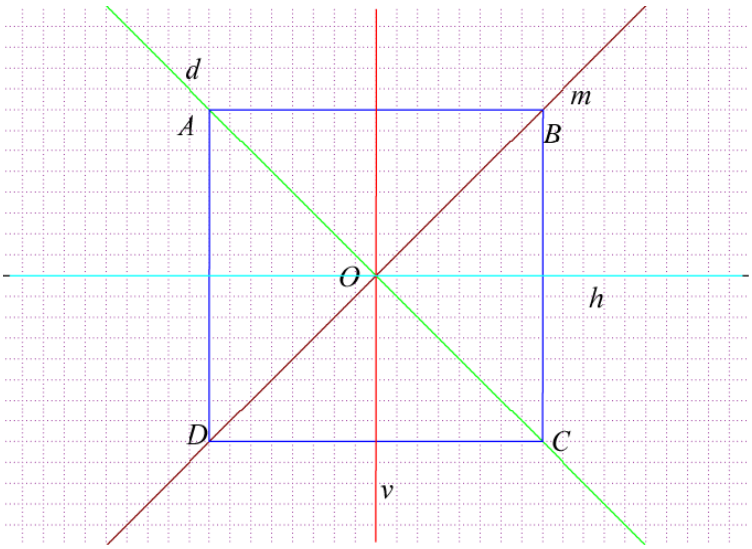
→ Le nombre de « 1 » qui apparaissent dans les coins est pair.

→ Il ne peut figurer deux « 1 » aux sommets d'une même diagonale alors que les deux sommets de l'autre diagonale est remplie de « 0 ».

## 2.6. Quotient par symétries

Nous avons donc 192 configurations légales… C'est encore trop ! Quotientons par symétries et rotations, c'est-à-dire en identifiant les configurations qui sont identiques à symétrie ou rotation près.

### 2.6.1. Le groupe diédral du carré, noté $D_4$



Cherchons les isométries[10] qui laissent le carré globalement invariant.
On vérifie aisément que l'ensemble de ces isométries muni de la loi de composition est un groupe, **appelé groupe diédral du carré et noté $D_4$**.

→ Soit $O$ le centre du carré. Le groupe $D_4$ contient :

(**i**) Les quatre symétries axiales – d'axes horizontal et vertical passant par le centre $O$ ainsi que d'axes la diagonale montante et descendante -.
**(ii)** Les trois rotations de centre 0 et d'angles 90°, 180° et 270° dans le sens direct.
**(iii)** L'identité.

Appelons ces huit éléments respectivement $s_h,\ s_v, s_m, s_d\ , r, r^2, r^3$ et $i$.

→ Il n'y a pas d'autre élément dans le groupe $D_4$. Pour le prouver, plaçons-nous dans le repère $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. Un élément $f$ de $D_4$ est une isométrie de $\mathbb{R}^2$ qui laisse globalement invariant le carré. Puisqu'une isométrie conserve le barycentre, l'image du centre du carré est lui-même. Une isométrie est une application affine, qui vérifie en outre $f(O) = O$, donc on peut identifier $f$ à sa partie linéaire $\vec{f}$ qui est une isométrie de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$. $f$ est donc entièrement déterminée par l'image d'une base.
Pour l'image du premier vecteur $\overrightarrow{OA}$ , quatre choix au maximum sont possibles : $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ ou $\overrightarrow{OD}$
Ensuite, pour l'image du second vecteur $\overrightarrow{OB}$, deux choix au maximum sont possibles :
puisque $f$ est une isométrie, $f(A)f(B) = AB$, ce qui laisse au maximum deux candidats pour $f(B)$. Ce sont les deux sommets du carré qui sont voisins de $f(A)$.
On en déduit que $\text{card}(D_4) \leq 2 \times 4 = 8$

→ Bilan. $D_4 = \{i, s_h,\ s_v, s_m, s_d\ , r, r^2, r^3\}$

### **2.6.2.** Sous-groupes de $D_4$

Classifions les sous-groupes de $D_4$ selon leur cardinal.
Soit $H$ un sous-groupe de $D_4$.
D'après le théorème de Lagrange, le cardinal d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe.
On en déduit que : $\text{card}(H) \in \{1,2,4,8\}$. Raisonnons par disjonction des cas :

→ Si $\text{card}(H) = 1,\ H = \{e\}$

→ Si $\text{card}(H) = 8,$ alors $H = D_4$

→ Si $\text{card}(H) = 2,$ alors $H$ est engendré par un élément d'ordre 2, donc :

$$H = < s_h > \text{ ou } H = < s_v > \text{ ou } H = < s_m > \text{ ou } H = < s_d > \text{ ou } H = < r^2 >$$

→ Si $\text{card}(H) = 4$, alors on distingue deux sous cas :

⇝ Soit $H$ est cyclique, c'est-à-dire engendré par un élément, qui est donc nécessairement d'ordre 4. On a alors nécessairement $H = < r >$

⇝ Soit $H$ n'est pas cyclique. Dans ce cas, $r \notin H$ et $r^3 \notin H$ donc il existe au moins deux symétries axiales dans $H$. Puisque la composée de deux symétries axiales dont l'angle orienté entre les axes est $\theta$ est une rotation d'angle $2\theta$ et que $r \notin H$ et $r^3 \notin H$ , on ne peut donc avoir dans

[10] Soit $(E, d)$ un espace métrique. Une transformation $f : E \to E$ est appelée isométrie si : $\forall (x, y) \in E^2, d\big(f(x), f(y)\big) = d(x, y)$. Autrement dit, une transformation est une isométrie si et seulement si elle conserve les longueurs.

$H$ deux symétries dont les axes forment un angle non orienté de $\frac{\pi}{4}$. Il existe donc uniquement 2 sous-groupes non cycliques d'ordre 4, c'est-à-dire :

$$H = < s_h, s_v > = \{e, s_h, s_v, r^2\} \quad \text{ou} \quad H = < s_m, s_d > = \{e, s_m, s_v, r^2\}$$

### 2.6.3. Type de configuration

Comme annoncé au **2.6.**, nous allons regrouper les configurations par types.

→ Définition.
On dit que deux configurations sont du même type si l'on peut passer de l'une à l'autre par une rotation ou une symétrie.

On définit donc la relation $\mathcal{R}$ sur $X_l$ par : $x\mathcal{R}y$ si $\exists \sigma \in D_4$ , $\sigma(x) = y$.
On vérifie aisément que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence : l'ensemble quotient $X_l/\mathcal{R}$ en découle.

→ Considérons la projection canonique :

$$\pi : \left| \begin{array}{l} X_l \to X_l/\mathcal{R} \\ x \mapsto D_4(x) \end{array} \right.$$

Si $x \in X$, on appelle $\pi(x)$ le **type de la configuration $x$**.

### 2.6.4. Propriété fondamentale

→ Soit $x \in X_l$. $\pi(x) = \{\sigma(x), \sigma \in D_4\} = D_4(x)$ est l'orbite de $x$ sous l'action du groupe diédral du carré.

→ $(D_4)_x = \{t \in D_4,\ t(x) = x\}$ est le stabilisateur de $x$ sous l'action de $D_4$. C'est un sous-groupe de $D_4$ . Comme le cardinal – ou ordre – d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe, le cardinal de $(D_4)_x$ divise 8.

→ La formule des classes vue plus haut au **2.3.2.4.** nous donne :

$$\frac{\text{card}(D_4)}{\text{card}(D_4)_x} = \text{card}(D_4(x))$$

Le type de configuration associé à $x$, à savoir $D_4(x)$ ,possède donc $1, 2, 4$ ou $8$ éléments.

### 2.6.5. Sous-groupes $(D_4)_x$

#### 2.6.5.1. Pour bien comprendre le problème

Pour chacune des configurations suivantes, regardées séparément, combien de configurations sont équivalentes à cette configuration, pour la relation définie par $\mathcal{R}$ ?

$x_1$

| | | |
|---|---|---|
| I | 0 | I |
| 0 | I | I |
| I | I | I |

$x_2$

| | | |
|---|---|---|
| I | 0 | I |
| I | 0 | I |
| I | 0 | I |

$x_3$

| | | |
|---|---|---|
| I | 0 | I |
| I | I | I |
| 0 | 0 | 0 |

$x_4$

| | | |
|---|---|---|
| I | 0 | I |
| I | 0 | 0 |
| 0 | I | 0 |

Réponses. Le nombre de configurations est égal aux nombres d'éléments de $D_4(x_i)$ , où $1 \leq i \leq 4$.

$(D_4)_{x_1} = \{i, s_d\}$ $\quad$ $(D_4)_{x_2} = \{i, s_h, s_v, r^2\}$ $\quad$ $(D_4)_{x_3} = \{i, s_v\}$ $\quad$ $(D_4)_{x_4} = \{i\}$

card $(D_4(x_1)) = 4$ $\quad$ card $(D_4(x_2)) = 2$ $\quad$ card $(D_4(x_3)) = 4$ $\quad$ card $(D_4(x_4)) = 8$

Visualisons les $D_4(x_i)$ :

$D_4(x_1) =< r > (x_1)$ $\quad$ $D_4(x_2) = \{x_2, r(x_2)\}$ $\quad$ $D_4(x_3) =< r > (x_3)$

*Etudions à présent le cas général. Soit $x \in X_l$. Nous savons que le stabilisateur $(D_4)_x$ est un sous-groupe du groupe diédral, donc peut prendre* ***a priori****, d'après* ***2.6.2.,*** *dix formes possibles. Nous allons voir que parmi ces dix formes, certaines sont cependant impossibles.*

**2.6.5.2.** Propriété

Les sous-groupes $(D_4)_x$ d'ordre 2 sont engendrés par une symétrie axiale.

Preuve.
Les sous-groupes de $D_4$ d'ordre 2 sont engendrés par un élément d'ordre 2, donc soit par une symétrie axiale, soit par $r^2$.

Cependant il ne peut y avoir de stabilisateur $(D_4)_x$ d'ordre 2 engendré par $r^2$. En effet, d'après **2.5.1.,** toutes les orientations des sommets ne sont pas légales. S'il existait $x \in X_l$ tel que $r^2 \in (D_4)_x$ alors les sommets auraient tous la même orientation et les arêtes opposées aussi, donc les symétries d'axe horizontal et vertical seraient dans le stabilisateur $(D_4)_x$, donc $(D_4)_x$ serait au moins d'ordre 4.

Illustration. Voir **2.6.5.1.**, $x_1$ et $x_3$.

**2.6.5.3.** Propriété
Le seul sous-groupe $(D_4)_x$ d'ordre 4 est

$$(D_4)_x = (D_4)_{x_2} = \{i, s_h, s_v, r^2\} = < s_h, s_v >$$

Preuve.
→ D'après **2.6.2.,** les sous-groupes $H$ de $D_4$ d'ordre 4 sont de la forme

$$H = < s_m, s_d > \quad \text{ou} \quad H = < s_h, s_v > \quad \text{ou} \quad H = < r >.$$

→ Ici, il ne peut y avoir de stabilisateur $(D_4)_x$ d'ordre 4 et contenant la rotation $r$, car dans ce cas tous les sommets auraient la même orientation ; toutes les arêtes auraient également la même orientation. Ce stabilisateur contiendrait alors le groupe diédral $D_4$ tout entier. Contradiction.

→ Il ne peut y avoir non plus de stabilisateur $(D_4)_x$ d'ordre 4 contenant les deux symétries obliques car alors les sommets opposés auraient la même orientation deux à deux, donc auraient tous la même orientation d'après **2.5.1.** Les quatre arêtes auraient également la même orientation, donc le stabilisateur serait d'ordre 8. Contradiction.

Illustration. Voir **2.6.5.1.**, $x_2$.

**2.6.5.4. Table du groupe** $(D_4)_x$ lorsque $(D_4)_x$ est d'ordre 4. Isomorphisme de groupes

D'après **2.6.5.3.**, si $(D_4)_x$ est d'ordre 4, alors $(D_4)_x = \{i, s_h, s_v, r^2\}$. En voici la table :

| $\circ$ | $i$ | $s_h$ | $s_v$ | $r^2$ |
|---|---|---|---|---|
| $i$ | $i$ | $s_h$ | $s_v$ | $r^2$ |
| $s_h$ | $s_h$ | $i$ | $r^2$ | $s_v$ |
| $s_v$ | $s_v$ | $r^2$ | $i$ | $s_h$ |
| $r^2$ | $r^2$ | $s_v$ | $s_h$ | $i$ |

Or, voici la **Table du groupe** $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,, +, (0,0))$

| ↱ + | (0,0) | (1,0) | (0,1) | (1,1) |
|---|---|---|---|---|
| (0,0) | (0,0) | (1,0) | (0,1) | (1,1) |
| (1,0) | (1,0) | (0,0) | (1,1) | (0,1) |
| (0,1) | (0,1) | (1,1) | (0,0) | (1,0) |
| (1,1) | (1,1) | (0,1) | (1,0) | (0,0) |

Propriété et définition.

Les deux groupes $((D_4)_x, \circ, id)$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,, +, (0,0))$ sont **isomorphes,** c'est-à-dire que l'application

$\psi : (D_4)_x \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie par :

$\psi(i) = (0,0)$ , $\psi(s_h) = (1,0)$, $\psi(s_v) = (0,1)$, $\psi(r^2) = (1,1)$ vérifie :

**(i)** $\forall\, (\sigma, \tau) \in ((D_4)_x)^2\,,\ \ \psi(\sigma \circ \tau) = \psi(\sigma) + \psi(\tau)$

On peut le vérifier en comparant les tables des deux groupes, qui sont identiques en renommant les éléments.

**(ii)** $\psi$ est bijective

L'intérêt d'un isomorphisme de groupes est de créer une bijection avec un autre groupe connu qui possède la même structure. Ici, les caractéristiques principales de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, (0,0))$ sont les suivantes :

(*) Il s'agit d'un groupe **commutatif** d'ordre 4. En effet, la table du groupe est symétrique par rapport à la diagonale descendante.

(**) Tous les éléments sont d'ordre 2 (on obtient l'élément neutre sur la diagonale descendante).

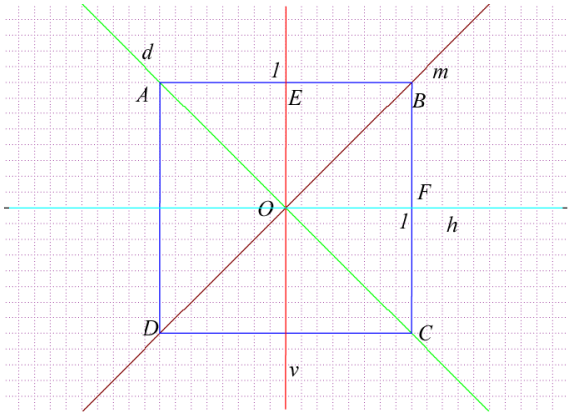
**2.6.5.5.** Les deux autres sous-groupes $(D_4)_x$ sont triviaux
Il reste les deux sous-groupes triviaux d'ordres 1 et 8. Voir dans l'exemple, $x_4$.

**2.6.5.6.** Table du groupe diédral $D_4$ :

| ↱ ∘ | $i$ | $s_h$ | $s_v$ | $r^2$ | $r$ | $r^3$ | $s_d$ | $s_m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | $i$ | $s_h$ | $s_v$ | $r^2$ | $r$ | $r^3$ | $s_d$ | $s_m$ |
| $s_h$ | $s_h$ | $i$ | $r^2$ | $s_v$ | $s_d$ | $s_m$ | $r$ | $r^3$ |
| $s_v$ | $s_v$ | $r^2$ | $i$ | $s_h$ | $s_m$ | $s_d$ | $r^3$ | $r$ |
| $r^2$ | $r^2$ | $s_v$ | $s_h$ | $i$ | $r^3$ | $r$ | $s_m$ | $s_d$ |
| $r$ | $r$ | (*) $s_m$ | $s_d$ | $r^3$ | $r^2$ | $i$ | $s_h$ | $s_v$ |
| $r^3$ | $r^3$ | $s_d$ | $s_m$ | $r$ | $i$ | $r^2$ | $s_v$ | $s_h$ |
| $s_d$ | $s_d$ | $r^3$ | $r$ | $s_m$ | $s_v$ | $s_h$ | $i$ | $r^2$ |
| $s_m$ | $s_m$ | $r$ | $r^3$ | $s_d$ | $s_h$ | $s_v$ | $r^2$ | $i$ |

→ Explication des résultats. Tout d'abord, il faut lire dans la case (*) $r \circ s_h = s_m$

Pour vérifier ce résultat, il suffit de prendre l'image de $F$ (1 ; 0). Soit $E$ (0 ; 1).




Pour déterminer $r \circ s_h$, calculons les images de $F$ puis de $B$ par cette isométrie de $D_4$ :
$r \circ s_h(F) = r(F) = E$ et $r \circ s_h(B) = r(C) = B$
$r \circ s_h$ coïncide donc avec $s_m$ sur le repère affine $(O\,;\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OB})$ donc $r \circ s_h = s_m$

Remarque.
Les rotations conservent les angles orientés alors que les symétries transforment les angles orientés en leurs opposés. La composée d'une symétrie puis d'une rotation est donc une symétrie, comme on peut le vérifier grâce aux couleurs du tableau du **2.6.5.6.**.

On prouve de façon analogue que $s_h \circ r = s_d$

→ On en déduit que :

$$r \circ s_h = s_m \neq s_d = s_h \circ r$$

Le groupe diédral $(D_4)$ n'est donc pas commutatif. La table de groupe n'est pas symétrique par rapport à la diagonale descendante.

**2.6.5.7.** Conséquence : calcul rapide du nombre d'éléments de l'orbite $D_4(x)$ pour $x \in X_l$

Bilan. Pour obtenir rapidement le nombre d'éléments de l'orbite, on teste dans cet ordre :
(**i**) Si la rotation $r$ laisse la configuration inchangée, l'orbite contient un seul élément.
Sinon :
(**ii**) Si la configuration est symétrique par rapport aux deux axes horizontal et vertical, l'orbite contient deux éléments.
Sinon :
(**iii**) Si la position contient un seul axe de symétrie horizontal, vertical ou oblique, l'orbite contient quatre éléments.
Sinon : (**iv**) l'orbite contient huit éléments.

### **2.6.6.** Classification par types

En appliquant le **2.6.3.** à l'ensemble des configurations du taquin, on trouve quarante-huit types de configurations différents (voir en annexe le graphe du taquin).

| card$(\pi(x))$ | 1 | 2 | 4* | 8 | Au total |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de classes distinctes | 8 | 4 | 28* | 8 | 48 |
| Nombre total de configurations | 8 | 8 | 112* | 64 | 192 |

Lecture de la troisième colonne* :

Parmi les types possédant 4 éléments de $X_l$, il y a 28 types distincts.

Ceci regroupe donc $4 \times 28 = 112$ configurations légales.

## 2.7. Distance sur le graphe quotient $X_l/\mathcal{R}$

### 2.7.1. Construction du graphe quotient

Soit $E = \{L_1, L_2, L_3, C_1, C_2, C_3\}$ l'ensemble des mouvements élémentaires de $X_l$.

On reprend les notations de la partie **1.** sur les distances, en se plaçant dans le graphe non orienté non pondéré

$$\mathcal{G}' = (\mathcal{S}', \mathcal{A}'), \text{où } \mathcal{S}' = X_l/\mathcal{R} = \{\pi(x), x \in X_l\} \text{ et } \mathcal{A}' = \big\{\{\pi(x), \pi(g(x))\}, x \in \mathrm{X}_l, g \in \mathrm{E}\big\}.$$

Les arêtes sont bien définies car :

$$\forall (x, y) \in X_l^2 \text{ tel que } \pi(x) = \pi(y), \forall g \in E, \exists g' \in \mathrm{E}, \text{tel que : } \pi(g(x)) = \pi(g'(y))$$

Preuve.

Soit $(x, y) \in X_l^2$ tel que $\pi(x) = \pi(y)$. Il existe donc $f \in D_4$ tel que $x = f(y)$.
Soit $g \in E$. $g(x) = g \circ f(y)$. Posons $g' \coloneqq g \circ f$. On en déduit donc :

$$\pi(g(x)) = \pi(g'(y)) \text{ avec } g' \in E$$

Autrement dit, pour tout $x \in \mathrm{X}_l$, pour tout représentant $y$ du type $\pi(x)$, l'ensemble des arêtes $\big\{\{\pi(x), \pi(g(x))\}, g \in \mathrm{E}\big\}$ est inclus dans l'ensemble des arêtes $\big\{\{\pi(y), \pi(g(y))\}, g \in \mathrm{E}\big\}$.
L'inclusion réciproque se déduisant de cette inclusion directe par symétrie, pour chaque type $\pi(x)$ fixé, l'ensemble des arêtes est bien défini car il ne dépend pas du représentant de $\pi(x)$ choisi.

Ce graphe $\mathcal{G}' = (\mathcal{S}', \mathcal{A}')$ est donc un graphe non orienté et non pondéré ; on prouve facilement qu'il est complet.
On appelle $d'$ la distance associée à ce graphe $\mathcal{G}'$ (voir **1.11.1.**). $(\mathcal{S}', d')$ est un espace métrique.
Ce graphe possède 48 sommets (voir **2.6.6.**)

### 2.7.2. Voisins d'un type

#### 2.7.2.1. Définition

Soit $x \in \mathrm{X}_l$. On définit l'ensemble des voisins d'un type $\pi(x)$ par l'ensemble

$$V\big(\pi(x)\big) = \big\{\pi\big(g(x)\big), g \in \mathrm{E}\big\}$$

#### 2.7.2.2. Propriété

Soit $x \in \mathrm{X}_l$. Alors : $\quad V\big(\pi(x)\big) = \{z \in \mathcal{S}', d'(\pi(x), z) = 1\}$

*Pour alléger les notations, on notera pour la suite les sommets de $X_l/\mathcal{R}$ par les lettres $x, y, z$ ...*
*En particulier, on conservera la lettre $b$ pour désigner le but. Voici quelques curiosités.*

### 2.7.3. Alignement

#### 2.7.3.1. Définition

Soit $(x, y, z) \in (\mathcal{S}')^3$.
On dit que 3 sommets $x, y$ et $z$ sont **alignés dans cet ordre** si $d'(x, y) + d'(y, z) = d'(x, z)$.

#### 2.7.3.2. Définition

On dit que 3 sommets $x, y$ et $z$ sont **alignés** si :

$(x, y$ et $z$ sont alignés dans cet ordre ) ou $(x, z$ et $y$ sont alignés dans cet ordre)
ou $(y, x$ et $z$ sont alignés dans cet ordre) .

**2.7.3.3. Définition**

Soit $(x_1, x_2, x_3, .., x_n) \in (\mathcal{S}')^n$.

On dit que le trajet $(x_1, x_2, x_3, .., x_n)$ **est en ligne droite directe** si :

$$d'(x_1, x_n) = \sum_{k=1}^{n-1} d'(x_k, x_{k+1})$$

Attention. On ne peut définir la droite $(xy)$ en tant que l'ensemble des sommets qui sont alignés avec $x$ et $y$. En effet, comme vous pouvez le vérifier, par deux sommets distincts du graphe il n'existe pas, en général, un **unique** chemin de longueur minimale. Deux sommets ne sont donc pas reliés, en général, par un unique segment.

### 2.7.4. Parité

**2.7.4.1.** Exemple

Anaïs prétend qu'elle a résolu la configuration suivante en exactement 10 coups. Est-ce possible ?

| | | |
|---|---|---|
| I | I | 0 |
| I | 0 | I |
| I | 0 | 0 |

Réponse : non ! En effet, chaque mouvement élémentaire modifie la parité de la somme de la ligne ou colonne retournée, car elle laisse inchangée la parité de la somme des éléments extrêmes et modifie l'élément du milieu. Ici, la somme des éléments inscrits sur les cases est 5, nombre impair, donc cette configuration ne peut être résolue en un nombre pair de coups.

*Pour exploiter au maximum cette propriété, affinons la notion de voisin définie au **2.7.2.***

**2.7.4.2.** Voisin montant et voisin descendant

**2.7.4.2.1.** Propriété

Soit $(x, y) \in (X/\mathcal{R})^2$ tel que $d'(x, y) = 1$. Alors : $\forall z \in (X/\mathcal{R}), |d'(x, z) - d'(y, z)| = 1$.

Preuve
Soit $(x, y) \in (X/\mathcal{R})^2$ tel que $d'(x, y) = 1$ et $z \in (X/\mathcal{R})$. D'après l'inégalité triangulaire,
$|d'(x, z) - d'(y, z)| \leq d'(x, y) = 1$ donc $d'(x, z) - d'(y, z) \in \{-1,0,1\}$.

Puisque les deux sommets $x$ et $y$ sont voisins, il y a un et un seul de ces deux sommets pour lequel la somme des chiffres inscrits sur les cases possède la même parité que celle de $z$.

$d'(x, z) - d'(y, z)$ est donc la différence de deux nombres de parités différentes, donc ne peut être nulle, d'où le résultat annoncé.

**2.7.4.2.2.** Propriété et définition

Soient $x$ et $y$ deux sommets voisins. En appliquant le résultat précédent au but $b$, on en déduit que deux cas sont possibles :

→ Si $d'(x, b) = d'(y, b) + 1$ alors on dit que **$x$ est un voisin descendant de $y$** .

→ Si $d'(x,b) = d'(y,b) - 1$ alors on dit que **$x$ est un voisin montant de $y$.**

**2.7.4.3.** Conséquence

Pour tout couple de sommets voisins du graphe, tout sommet du graphe est aligné avec ces deux sommets.

Preuve.
$(x,y) \in (X/\mathcal{R})^2$ tel que $d'(x,y) = 1$. Alors : $\forall z \in (X/\mathcal{R}), |d'(x,z) - d'(y,z)| = 1 = d'(x,y)$
donc les sommets $x, y$ et $z$ sont alignés.

Expliquons cette formulation quelque peu étrange. Fixons un sommet $z$ et plaçons-nous au sommet $x$. Lorsque l'on effectue un mouvement élémentaire, soit on s'éloigne strictement de $z$, soit on s'en rapproche strictement.

Remarque. Cette propriété est valable également pour le graphe du Rubik's cube à 12 voisins car la signature de tout mouvement élémentaire ou de son inverse est égal à $-1$.
En revanche, cette propriété n'est plus vraie pour le graphe à 18 voisins[11]

## 2.7.5. Double liaison ou simple liaison entre voisins ?

Exemple. On cherche tous les mouvements élémentaires qui permettent, à partir du type A, d'obtenir le type B en un coup. Combien y en a-t-il ?
Même question à partir du type B pour obtenir le type A.

Type A (5 ; 4)[12]

| | | |
|---|---|---|
| I | 0 | 0 |
| I | I | I |
| I | 0 | 0 |

Type B (6 ; 4)

| | | |
|---|---|---|
| I | I | I |
| 0 | I | I |
| 0 | I | 0 |

Réponse. Pour passer du type A au type B, deux mouvements élémentaires sont possibles : $L_1$ ou $L_3$.
En revanche, il n'y a qu'un seul mouvement élémentaire pour passer du type B au type A : le mouvement élémentaire $C_3$.
Le passage au quotient apporte une certaine asymétrie à un graphe qui était symétrique au départ, car les arêtes qui permettent de passer du type A au type B ne sont pas définies à l'aide du mouvement réciproque de celui qui permet de passer du type B au type A (voir **2.7.1.** pour la construction du graphe quotient). Cependant, la notion de voisin reste symétrique, même si le nombre de chemins qui permettent de passer de $A$ à $B$ n'est pas nécessairement égal au nombre de chemins qui permettent de passer de $B$ à $A$.

## 2.7.6. Niches montantes et descendantes

**2.7.6.1.** Niches montantes

→ Définition.
On appelle **niche montante** un type de configuration tel que tout mouvement le rapproche du but.

[11] Voir **1.10.2.** et **1.10.5.**
[12] Ce type est numéroté (5 ; 4) ; c'est le $4^{ème}$ type répertorié parmi les 9 types qui sont à 5 coups du but. Voir en annexe les 48 types.

→ Exercice. En examinant le graphe (voir annexe), combien y-a-t-il de niches montantes ?

Réponse : 9. Ce sont les types qui n'ont aucun voisin descendant.

**2.7.6.2.** Niches descendantes

→ Définition.
On appelle **niche descendante** un type de configuration tel que tout mouvement l'éloigne du but.

→ Exercice. Combien y-a-t-il de niches descendantes et pourquoi ?

Réponse : une seule, le but, par définition !

## 2.8. Algorithme de résolution optimale pour les humains

### 2.8.1. Balisage direct vers le but

#### 2.8.1.1. Notation

On utilise la notation du graphe de l'avant-dernière page (voir en annexe « anatomie mathématique du graphe quotient »). Par exemple, le type (5 ; 9) – par lequel passe le trajet de la figure ci-dessous, voir **2.8.1.2.** – est le neuvième type répertorié parmi ceux qui sont à une distance 5 du but. Dans le graphe de l'anatomie du taquin, ce type est noté de la manière suivante :

Voisins montants : 10, 12
Coups : 5
Type n° : 9
Voisins descendants : 1,2,3,4

| | | |
|---|---|---|
| I | I | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| I | 0 | 0 |

Cela signifie :

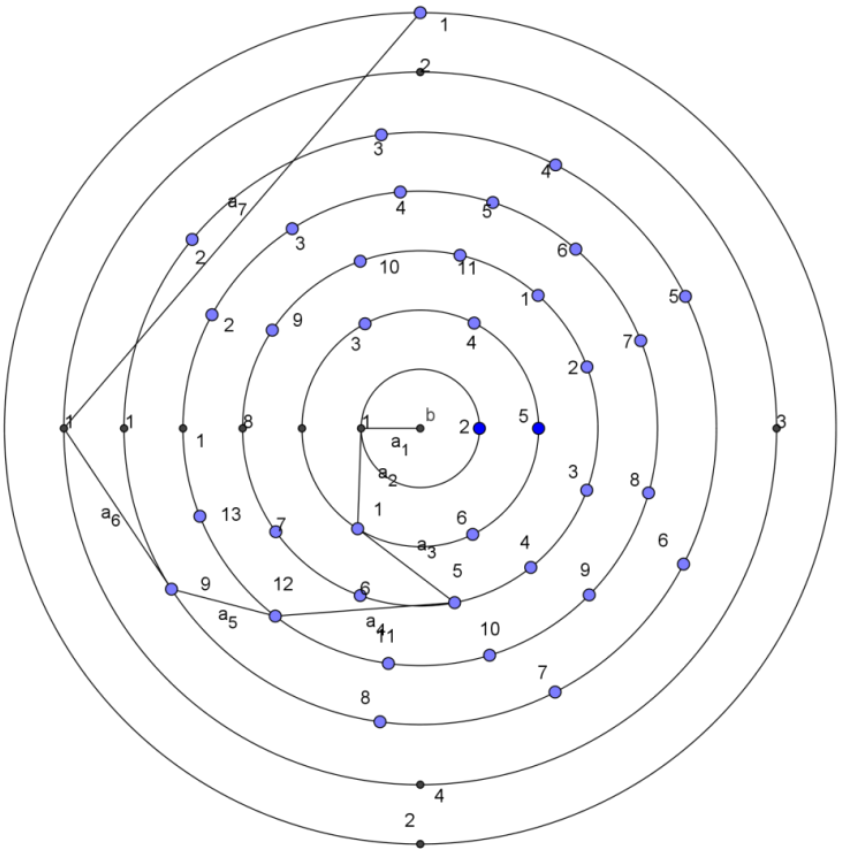
**(i)** que ce type a deux types de voisins montants, les types (4 ; 10) et (4 ; 12).

**(ii)** que ce type a quatre types de voisins descendants : (6 ; 1) ; (6 ; 2) ; (6 ; 3) et (6 ; 4).

Notons qu'il y a huit représentants de ce type. En effet, ce type n'a ni centre ni axe de symétrie, donc son orbite sous l'action de $D_4$ est de cardinal 8.

#### 2.8.1.2. Illustration d'un trajet en ligne droite vers le but

Voici un trajet au plus court en sept mouvements élémentaires pour résoudre le type (7; 1) –voir annexe– en passant successivement par les arêtes $a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1$.




*Trajet en ligne droite depuis le type* (7 ; 1) *jusqu'au but – ce n'est pas la seule ligne droite (!)*

Chacun des 48 types est représenté par un point situé sur un cercle. Le rayon de ce cercle correspond à la distance de ce type au but.

La figure ci-dessus illustre un trajet possible. Il existe de nombreux chemins, comme le lecteur pourra le vérifier à l'aide de l'annexe, menant du type (7 ; 1) au but en 7 coups.

Types $(7;1) \rightarrow_{C_2} (6;1) \rightarrow_{C_1} (5;9) \rightarrow_{L_1} (4;12) \rightarrow_{L_1} (3;5) \rightarrow_{C_1} (2;1) \rightarrow_{L_1} (1;1) \rightarrow_{L_1} b$

$(7;1)$

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| I | I | 0 |
| 0 | I | 0 |

$\rightarrow_{C_2}$

$(6;1)$

| | | |
|---|---|---|
| 0 | I | 0 |
| I | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

$\rightarrow_{C_1}$

$(5;9)$

| | | |
|---|---|---|
| I | I | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| I | 0 | 0 |

$\rightarrow_{L_1}$

$(4;12)$

| | | |
|---|---|---|
| I | 0 | I |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

$\rightarrow_{L_1}$

$(3;5)$

| | | |
|---|---|---|
| 0 | I | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

$\rightarrow_{C_1}$

$(2;1)$

| | | |
|---|---|---|
| I | I | 0 |
| I | 0 | 0 |
| I | 0 | 0 |

$\rightarrow_{L_1}$

$(1;1)$

| | | |
|---|---|---|
| I | I | I |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

$\rightarrow_{L_1}$

$b$

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

Le système d'écriture des arêtes de cette solution pivote éventuellement le taquin après chaque coup pour que la nouvelle configuration obtenue soit identique au représentant du type écrit en annexe. Par exemple, le passage du $(5;9)$ au $(4;12)$ nécessite, après $L_1$, la symétrie $s_d$ .

**2.8.1.3.** Les balises

L'idée est de recouvrir l'ensemble $X_l/\mathcal{R}$ des sommets par un petit nombre de boules de rayon 2. Un joueur qui connaît le type associé aux centres de chacune de ces boules et qui en outre possède une profondeur de calcul égale à 2, c'est-à-dire qui est capable d'arriver à un de ces centres s'il faut au maximum deux coups pour y parvenir, saura résoudre le taquin.

Posons $\mathcal{C} =: \{(0\,;1)\,;(2\,;1);(2;2)\,;(2;5)\,;(3;5)\,;(5;9)\}$. Appelons ces six sommets les **balises**. Les voici :

| Balise n° | (0;1) but | | | (2;1) | | | (2;2) | | | (2;5) | | | (3;5) | | | (5;9) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Config. | 0 | 0 | 0 | I | I | 0 | I | 0 | 0 | 0 | I | 0 | 0 | I | 0 | I | I | 0 |
| | 0 | 0 | 0 | I | 0 | 0 | I | I | 0 | 0 | I | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 0 | 0 | I | 0 | 0 | I | 0 | 0 | I | 0 | I | 0 | 0 | 0 | I | 0 | 0 |

(**i**) En se plongeant dans le graphe donné en annexe, le lecteur pourra remarquer que :

$$X_l/\mathcal{R} = \left(\bigcup_{x\in C} B(x,2)\right) \bigcup (5\,;1)$$

Cela signifie qu'il existe un recouvrement de l'ensemble de quarante-sept parmi les quarante-huit types par cinq boules de rayon 2. Le seul type non recouvert est le type $(5\,;1)$
De plus :

(**ii**) Pour chaque type de configuration $x$ – à part pour le but $(0\,;1)$ et pour le type $(5\,;1)$ - il existe une balise $c_x$ qui soit à la fois visible par un joueur ayant une profondeur de calcul égal à 2 et située sur la route directe vers le but, c'est-à-dire :

$$\forall x \in X_l/\mathcal{R} - \{b;(5;1)\},\ \ \exists c_x \in \mathcal{C},\ \ d'(x,b) = d'(x,c_x) + d'(c_x,b)\ \text{ et }\ d'(x,c_x) \leq 2.$$

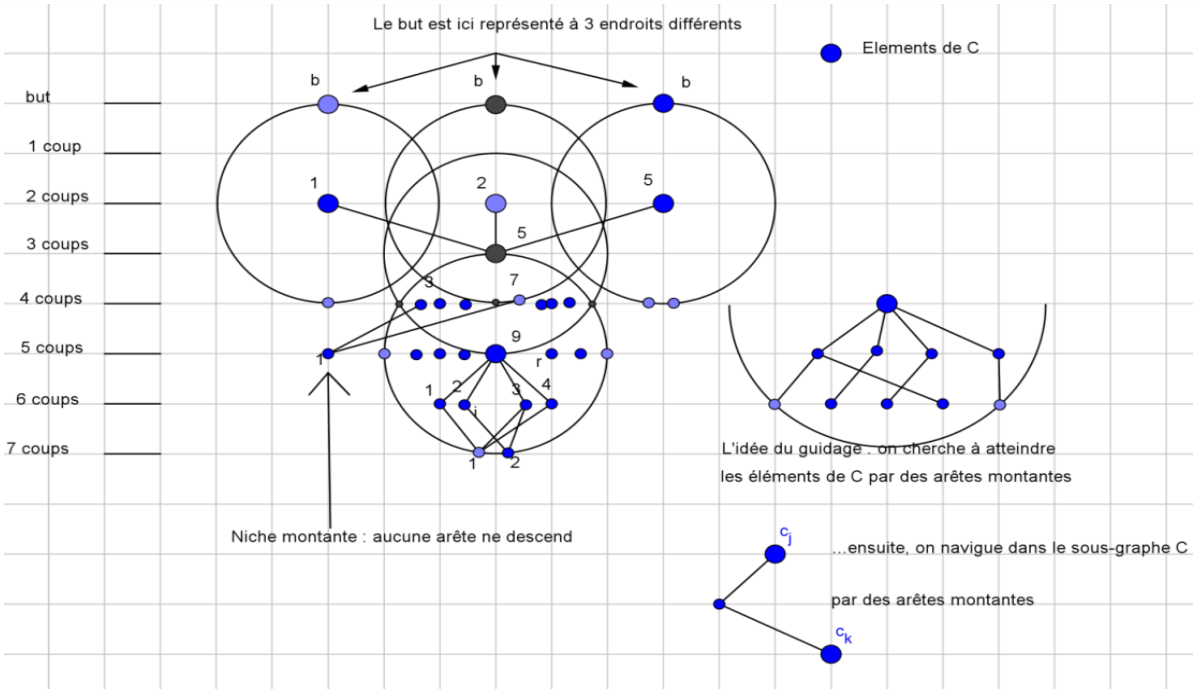
Autrement dit, pour chaque type excepté le type $(5\,;1)$ , il existe un trajet en ligne droite qui relie ce type au but dont le premier mouvement passe par une balise distante d'au plus 2 coups de celui-ci.

Quant au type $(5\,;1)$, il s'agit d'une niche montante, donc n'importe quel mouvement élémentaire le rapproche du but en le faisant entrer dans le recouvrement précité.

(**iii**) Le « trafic » dans le sous-graphe $\mathcal{C}$ des balises est « aussi fluide » que dans le graphe $X_l$ quand on va vers le but, c'est-à-dire qu'à partir de toute balise, on peut atteindre le but au plus court par une succession de trajets dont les longueurs sont inférieures ou égales à 2, tout en restant dans $\mathcal{C}$. En effet :

Depuis la balise $(5\,;9)$, on arrive à la balise $(3\,;5)$ via $L_1$ puis $C_1$.
Depuis la balise $(3\,;5)$, on arrive à la balise $(2\,;1)$ via $C_1$.
Les balises $(2\,;1)$, $(2\,;2)$ et $(2\,;5)$ sont à deux coups du but.

**(iv)** Voici une tentative de représentation schématique du recouvrement et du sous-graphe :




Notons que le recouvrement qui nous intéresse est un recouvrement par des demi-boules descendantes de rayon 2 (voir schéma).

**2.8.1.4.** Un algorithme pour les humains

Ceci nous donne donc un algorithme de résolution au plus court, aisément applicable par un humain.

Il lui suffit de connaître les cinq types clés, c'est-à-dire les cinq balises éléments de $\mathcal{C}$ autres que le but, de savoir à quelle distance chacune de ces balises se trouve du but, et d'être capable de calculer deux coups à l'avance, c'est-à-dire d'avoir une vision de rayon 2 dans le dédale du graphe.

*Faisons le bilan des deux graphes précédemment étudiés.*

## 2.8.2. Eléments caractéristiques des graphes

**2.8.2.1.** Le graphe $X_l$

| Nombre de sommets du graphe (ou de configurations légales) | Nombre de voisins d'un sommet | God's number |
|---|---|---|
| 192 | 6 | 7 |

**2.8.2.2.** Le graphe quotient $X_l/R$

| Nombre de sommets du graphe (ou nombre de types) | Nombre de voisins d'un sommet | God's number |
|---|---|---|
| 48 | Au maximum 6 | 7 |

## 2.9. Algorithme de modélisation du graphe et de résolution au plus court pour les machines

Les éléments suivants donnent des clés permettant de construire un deuxième algorithme qui résout au plus court ; cet algorithme est adapté aux machines.

On raisonne cette fois dans le graphe non quotienté

$$\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{A}), \text{où } \mathcal{S} = \mathrm{X}_l \text{ et } \mathcal{A} = \{\{x, g(x)\}, \text{où } g \text{ est un mouvement élémentaire}\}.$$

On appelle d la distance associée au graphe.

### 2.9.1. Décomposition en base 2 d'un nombre entre 0 et $511 = 2^9 - 1$ et réciproquement

→ Il s'agit de construire la bijection

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} [\![0; 511]\!] \to ([\![0; 1]\!])^9 \\ y = \sum_{i=0}^{8} y_i 2^i \mapsto (y_0 \,;\, y_1 \,;\, \dots \,;\, y_8) \end{array} \right.$$

→ Voici un algorithme adapté pour calculer l'image de $\varphi$ :

Variables
$y, z, i$ : entiers
$x$ : tableau de booléens de taille 9
Début
Afficher « Entrer un entier entre 0 et 511 »
Entrer $y$
Dans $z$ mettre $y$
Pour $i$ allant de 0 à 8
Dans $x[i]$ mettre mod($z$,2)
Dans $z$ mettre $E(z/2)$
Fin pour
Fin

($E$ désigne la fonction partie entière)

On obtient la décomposition

$$y = \sum_{i=0}^{8} x[i]\, 2^i = \sum_{i=0}^{8} y_i\, 2^i$$

Exemple. Le nombre 157 est codé par le tableau $\varphi(157) = x = (1\,;0\,;1\,;1\,;1\,;0\,;0\,;1\,;0)$ car il correspond à la décomposition :

$$157 = 1 + 2 \times 78 = 1 + 4 \times 39 = 1 + 4 \times (1 + 2 \times 19) = 1 + 4 + 8 \times (1 + 18)$$
$$= 1 + 4 + 8 + 16 \times (1 + 8) = 1 + 4 + 8 + 16 + 128 = 1.2^0 + 1.2^2 + 1.2^3 + 1.2^4 + 1.2^7$$

157 correspond donc à la configuration $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour alléger l'explication, on identifiera le tableau de nombres et la matrice associée.

157 correspond à une configuration légale. Ce n'est pas toujours le cas (voir le test de légalité du **2.5.6.**).

→ La bijection réciproque s'explicite facilement à l'aide d'une boucle.
On peut donc coder tout élément $x$ de $X$ par un nombre entre 0 et 511.

### **2.9.2.** Test de légalité

En revanche, un entier $y$ entre 0 et 511 ne correspond pas nécessairement à une configuration légale. Le test de légalité, en traduisant algébriquement **2.5.6.**, est le suivant :

$$y \text{ correspond à une configuration légale } \Leftrightarrow x := \varphi(y) = (y_0, y_1, .., y_8) \in X_l$$

$$\Leftrightarrow\ y_0 + y_2 + y_6 + y_8 \equiv 0\ [2] \quad \text{et} \quad y_0 . y_8 + y_2 . y_6\ \equiv 0\ [2]$$

Il est donc facile pour un ordinateur de tester si une position est légale et de la corriger si nécessaire pour qu'elle le devienne.

### **2.9.3.** Codage de l'image d'une configuration par un des six mouvements élémentaires

L'image d'une configuration $p = (a_0\ ;\ a_1\ ; a_2\ ; a_3\ ; a_4\ ;\ a_5\ ; a_6\ ; a_7\ ; a_8)$ par le mouvement élémentaire $C_2$ (retournement de la 2ème colonne) est

$$C_2(p) = (a_0\ ;\ 1 - a_7\ ; a_2\ ; a_3\ ; 1 - a_4\ ;\ a_5\ ; a_6\ ; 1 - a_1\ ; a_8)$$

Les cinq autres mouvements élémentaires se codent de façon analogue.

### **2.9.4.** Elaboration d'une procédure qui associe à une configuration donnée l'ensemble de ses voisins

Soit $x \in X$. On construit l'ensemble $\boldsymbol{V(x)} = \{y \in X, d\ (y, x) = 1\}$
$V(x)$ représente **l'ensemble des voisins de la configuration $\boldsymbol{x}$**.
Il va alors suffire de combiner **2.9.1** et **2.9.3.**

### **2.9.5.** Codage des éléments du graphe par construction de sphères dont le centre est le but et les rayons des entiers naturels consécutifs

#### **2.9.5.1.** Description de l'algorithme

Soit $\boldsymbol{S(x, k)} := \{y \in X, d(x, y) = k\}$ **la sphère de centre $\boldsymbol{x}$ et de rayon $\boldsymbol{k}$.**
Posons alors $\boldsymbol{X_k} := \boldsymbol{S(b, k)}$. C'est l'ensemble des configurations situés exactement à $k$ coups du but (voir schéma du **2.8.1.2.**)

L'objectif est d'associer à chaque configuration sa distance au but. L'idée est de déterminer d'abord l'ensemble des configurations $X_1$ qui sont à un coup du but, puis de raisonner par récurrence en construisant $X_{n+1}$ à l'aide de $X_n$ à l'aide de la relation :

$$X_{n+1} = \bigcup_{x \in X_n} S(x, 1) \setminus X_{n-1}$$

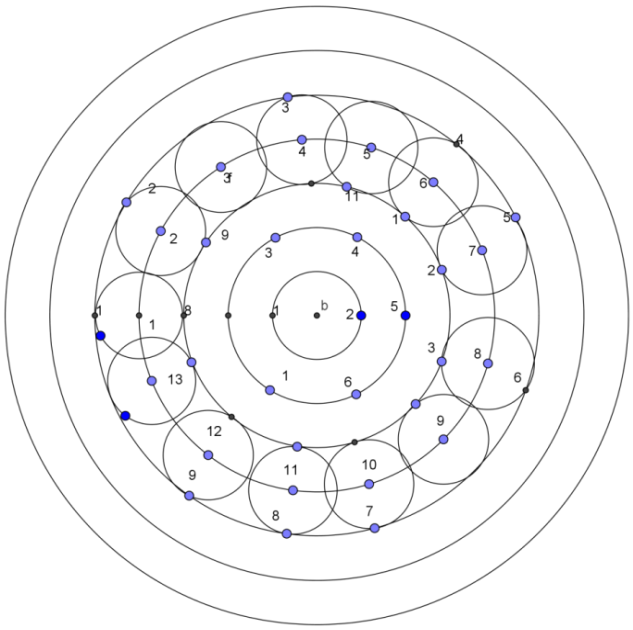
Cette relation est vraie car, d'après **2.7.4.2.2**, chaque mouvement élémentaire fait se rapprocher ou s'éloigner strictement du but toute configuration en la modifiant.

La construction de la suite $(X_n)_{0 \leq n \leq 7}$ s'effectue par récurrence, à l'aide d'une boucle pour.

#### **2.9.5.2.** Illustration de la récurrence

L'ensemble des sommets situés à cinq coups du but s'obtient en faisant la réunion des sphères de rayon 1 centrées en les sommets à quatre coups du but, en enlevant les points de ces sphères qui sont situés à trois coups du but.

Les éléments du graphe sont codés par des nombres entre 0 et 511. A chaque nouveau sommet $s$ recensé, on lui attribue sa distance au but $\delta(s)$ que l'on reporte dans un tableau.



Voici donc l'idée de l'algorithme : pour tout point $x$ de la sphère $X_n$, tous les « satellites » voisins de $x$ sont soit dans $X_{n+1}$ soit dans $X_{n-1}$ ; on construit donc :

Dans $X_{-1}$ mettre le vide ; dans $X_0$ mettre 0 ; pour $n \in [\![0\,;6]\!]$, dans $X_{n+1}$ mettre $V(X_n)\backslash X_{n-1}$.
où $V(X_n) = \{V(x), x \in X_n\}$
et $V(x)$ est l'ensemble des configurations obtenues en faisant agir l'ensemble des mouvements élémentaires sur la configuration $x$.

**2.9.5.3.** Détail de la fonction delta

```
Variables
    i : entier
    X_i : ensembles, −1 ≤ i ≤ 7
    x, y : entiers compris entre 0 et 511.
    δ : fonction dont l'ensemble de départ est inclus dans [[0; 511]] à valeurs dans [[0; 7]]
Début
   Dans X_{−1} mettre le vide
   Dans X_0 mettre 0
  Dans δ(0) mettre 0
   Pour i de 0 à 6
     Dans X_{i+1} mettre le vide
          Pour x dans X_i faire
               Pour y dans V(x) faire
                   Si y n'appartient pas à X_{i−1} alors dans X_{i+1} mettre X_{i+1} ∪ {y}
                                                   et dans δ(y) mettre i + 1
                   Fsi
               Fin pour
          Fin pour
  Fin pour
Fin
```

**2.9.5.4.** Ecrire un algorithme qui résout le taquin au plus court

Cela devient très facile grâce au **2.9.5.3**. On dispose de la fonction $\delta : \left| \begin{array}{c} X_l \to \mathbb{N} \\ x \mapsto \delta(x) = d(x, b) \end{array} \right.$ qui donne le nombre de coups nécessaires pour atteindre le but.

Il suffit donc, en se déplaçant dans la sphère de centre $x$ et de rayon 1, de prendre le premier élément $y$ de $V(x)$ tel que $\delta(y) = \delta(x) - 1$ et de continuer ainsi à partir de la nouvelle sphère centrée en $y$, en itérant le processus jusqu'au but.

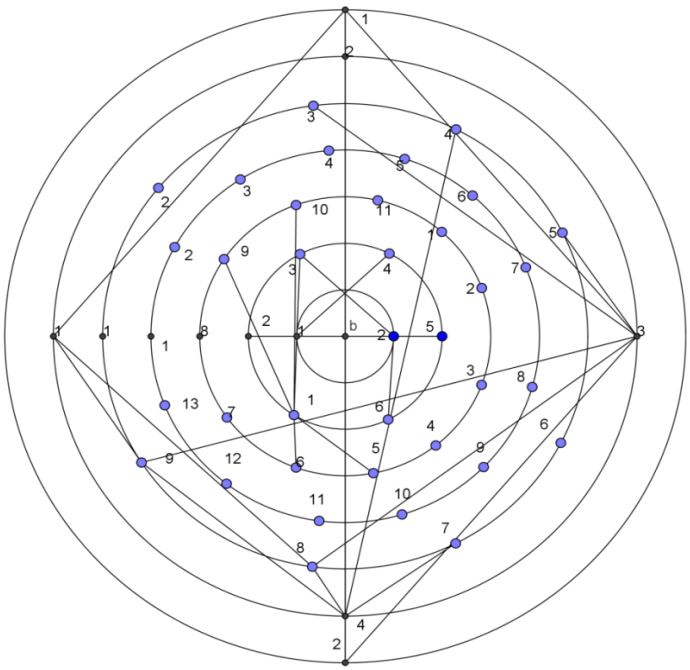
## 2.10. Supports disponibles

**2.10.1.** Présentation du taquin à retournement sous forme d'exercice corrigé, accessible à un élève de terminale

**2.10.2.** Algorithme Algobox

## 2.11. Anatomie mathématique du taquin

Allure du graphe quotient (toutes les arêtes ne sont pas tracées)



**Conclusion**

Nous avons pu constater, à travers cet article, que le Rubik's cube est un objet fortement mathématisable. Ainsi, cet objet est un puissant stimulant pour appréhender entre autres les théories des groupes et des graphes, par un angle d'attaque qui leur confère une résonnance concrète. Inversement, la connaissance de ces théories mathématiques permet de modéliser cet objet afin de nous permettre de l'appréhender de façon plus synthétique et de chercher à en découvrir les multiples facettes par divers angles d'approche.

Ce passage de la théorie à la pratique, dans un sens par l'interprétation, dans l'autre par la modélisation, est la démarche fondatrice des mathématiques, à savoir apprendre en résolvant des problèmes. Et c'est de cette interaction que naissent les mathématiques fécondes.

**ANNEXE.**

Structure du graphe quotient $X_l/\mathcal{R}$ : les 192 configurations sont regroupées en 48 types, le god's number est de 7. Les balises sont en vert.

Nombre de coups du but : 0 — 1 seul type

Voisins montants : BUT

Type : ∅

(0 ;**1**) noté **1**

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

Voisins descendants : (1 ; **1**) ; (1 ; **2**) notés **1**,**2**

Nombre de coups du but : 1 — 2 types distincts

| | | |
|---|---|---|
| Voisins montants : | BUT noté **1** | BUT noté **1** |
| Type : | (1 ;**1**) noté **1** | (1 ;**2**) noté **2** |
| | I I I / 0 0 0 / 0 0 0 | 0 0 0 / I I I / 0 0 0 |
| Voisins descendants : | 1,2,3,4 | 3,5,6 |

Nombre de coups du but : 2 — 6 types distincts

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Voisins montants : | **1** | **1** | **1,2** | **1** | **2** | **2** |
| Type : | (2 ;**1**) noté **1** | (2 ;**2**) noté **2** | (2 ;**3**) noté **3** | (2 ;**4**) noté **4** | (2 ;**5**) noté **5** | (2 ;**6**) noté **6** |
| | I I 0 / I 0 0 / I 0 0 | I 0 0 / I I 0 / I 0 0 | I I 0 / I I 0 / I I 0 | I 0 I / I 0 I / I 0 I | 0 I 0 / 0 I 0 / I 0 I | 0 I 0 / I 0 I / 0 I 0 |
| Voisins descendants : | 5,6,9,10 | 1,4,6,10 | 2,6,10 | 2,3,7 | 3,7,8,11 | 7 |

Nombre de coups du but : 3 — 11 types distincts

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Voisins montants : | **2** | **3,4** | **4,5** | **2** | **1** | **1,2,3** |
| Type : | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| | 0 0 0 / 0 I 0 / 0 0 0 | I I I / I I I / I I I | I 0 I / 0 I 0 / I 0 I | I I I / 0 I 0 / I I I | 0 I 0 / 0 0 0 / 0 0 0 | I I I / I 0 I / 0 0 0 |
| Voisins descendants : | 3 | ∅ | ∅ | 1,7,2 | 4,5,11,12 | 1,3 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Voisins montants : | **4,5,6** | **5** | **1** | **1,2,3** | **5** |
| Type : | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
| | 0 I 0 / I 0 I / I 0 I | 0 I 0 / 0 0 0 / I 0 I | I 0 I / I 0 I / I I I | I I I / I I 0 / 0 0 0 | I I 0 / 0 I I / I 0 0 |
| Voisins descendants : | 7,13 | 2,3,7,13 | 6,8,9,10 | 5,6 | 4,7,9,13 |

Nombre de coups du but : 4 — 13 types distincts

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Voisins mont. : | 4,6 | 4,8 | 1,6,8 | 5,11 | 5,10 | 9,10 | 4,7,8,11 |
| Type : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | I I I<br>I 0 I<br>I I I | I 0 I<br>0 0 0<br>I 0 I | 0 0 0<br>I 0 I<br>0 0 0 | 0 I 0<br>I I I<br>0 0 0 | 0 I 0<br>0 I 0<br>0 0 0 | I 0 I<br>I I I<br>I I I | 0 I 0<br>I I I<br>I 0 I |
| Voisins desc. : | Ø | Ø | 1 | 2,3,7 | 2,4,5 | 3,6,7 | 1 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Voisins montants : | 9 | 9,11 | 9 | 5 | 5 | 7,8,11 |
| Type : | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| | I I I<br>I 0 I<br>0 I 0 | I I I<br>0 I 0<br>I 0 I | 0 0 0<br>I 0 I<br>I 0 I | I I I<br>0 0 0<br>0 I 0 | I 0 I<br>0 0 0<br>0 0 0 | I 0 I<br>I 0 0<br>0 I 0 |
| Voisins desc. : | 2,3,4,8 | 4,5,6 | 2,5,7,9 | 5,6,7,8 | 3,4,6,9 | 2,6 |

Nombre de coups du but : 5 — 9 types distincts

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Voisins Montants : | 3,7 | 4,5,8,10,13 | 4,6,8,12 | 5,8,9,12 | 5,9,10,11 | 6,9,11,12,13 |
| Type : | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | 0 I 0<br>I I I<br>0 I 0 | 0 I 0<br>I 0 I<br>0 0 0 | 0 0 0<br>I I I<br>I 0 I | I I I<br>0 I 0<br>0 I 0 | I 0 I<br>0 I 0<br>0 0 0 | I I I<br>0 0 0<br>I 0 I |
| Voisins Descendants : | Ø | Ø | 3 | 4 | 3 | Ø |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Voisins Montants : | 4,6,10,11 | 8,11 | 10,12 |
| Type : | 7 | 8 | 9 |
| | I I I<br>I I I<br>0 I 0 | I I I<br>I 0 0<br>0 I 0 | I I 0<br>0 0 0<br>I 0 0 |
| Voisins Descendants : | 4 | 1,2,3,4 | 1,2,3,4 |

Nombre de coups du but : 6 — 4 types distincts

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Voisins montants : | 8,9 | 8,9 | 3,5,8 | 4,7,8,9 |
| Type : | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | 0 I 0<br>I 0 0<br>0 0 0 | I I I<br>I 0 0<br>I 0 I | I 0 I<br>I I 0<br>0 0 0 | I I I<br>I I 0<br>0 I 0 |
| Voisins descendants : | 1 | 2 | 1,2 | 1,2 |

Nombre de coups du but : 7 — 2 types distincts

| | | |
|---|---|---|
| Voisins montants : | 1,3,4 | 2,3,4 |
| Type : | 1 | 2 |
| | 0 0 0<br>I I 0<br>0 I 0 | I I I<br>I I 0<br>I 0 I |
| Voisins descendants : | Ø | Ø |