ENCYCLOPÉDIE

ou

DICTIONNAIRE RAISONNÉ

DES SCIENCES,

DES ARTS ET DES MÉTIERS,

PAR UNE SOCIÉTÉ DE GENS DE LETTRES.

Mis en ordre & publié par M. DIDEROT, de l'Académie Royale des Sciences & des Belles-Lettres de Pruſſe ; & quant à la PARTIE MATHÉMATIQUE, par M. D'ALEMBERT de l'Académie Françoiſe, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celle de Pruſſe, de la Société Royale de Londres, de l'Académie Royale des Belles-Lettres de Suede, & de l'Inſtitut de Bologne.

Tantùm ſeries juncturaque pollet,
Tantùm de medio ſumptis accedit honoris! HORAT.

Extraits édités préſentés par
Raphaël V. ALEXANDRE,
À Paris, MM. XIX.

Page de couverture composée
à partir de celle du tome septième
de l'Encyclopédie.

MATHÉMATIQUE, ou MATHÉMATIQUES, s. f. (*ordre encyclop. entend., raiſon, philoſophie* ou *ſcience, ſcience de la nature, Mathématiques.*) c'eſt la ſcience qui a pour objet les propriétés de la grandeur entant qu'elle eſt calculable ou meſurable. *Voyez* GRANDEUR, CALCUL, MESURE, *&c.*

Mathématiques au pluriel eſt beaucoup plus uſité aujourd'hui que *Mathématique* au ſingulier. On ne dit guere la *Mathématique*, mais les *Mathématiques.*

La plus commune opinion dérive le mot *Mathématique* d'un mot grec, qui ſignifie *ſcience*; parce qu'en effet, on peut regarder, ſelon eux, les *Mathématiques*, comme étant la ſcience par excellence, puiſqu'elles renferment les ſeules connoiſſances certaines accordées à nos lumieres naturelles; nous diſons à *nos lumieres naturelles*, pour ne point comprendre ici les vérités de foi, & les dogmes théologiques. *Voyez* FOI & THÉOLOGIE.

D'autres donnent au mot MATHÉMATIQUE une autre origine, ſur laquelle nous n'inſiſterons pas, & qu'on peut voir dans l'*hiſtoire des Mathématiques* de M. Montucla, *pag. 2. & 3.* Au fond, il importe peu quelle origine on donne à ce mot, pourvu que l'on ſe faſſe une idée juſte de ce que c'eſt que les *Mathémathiques*. Or cette idée eſt compriſe dans la définition que nous en avons donnée; & cette définition va être encore mieux éclaircie.

Les *Mathémathiques* ſe diviſent en deux claſſes; la premiere, qu'on appelle *Mathématiques pures*, conſidere les propriétés de la grandeur d'une maniere abſtraite: or la grandeur ſous ce point de vûe, eſt ou calculable, ou meſurable: dans le premier cas, elle eſt repréſentée par des nombres; dans le ſecond, par l'étendue: dans le premier cas les *Mathématiques* pures s'appellent *Arithmétiques*; dans le ſecond, *Géométrie. Voyez* les mots ARITHMÉTIQUE & GEOMÉTRIE.

La ſeconde claſſe s'appelle *Mathématiques mixtes*; elle a pour objet les propriétés de la grandeur concrete, en tant qu'elle eſt meſurable ou calculable; nous diſons *de la grandeur concrete*, c'eſt-à-dire, de la grandeur enviſagée dans certains corps ou ſujets particuliers. *Voyez* CONCRET.

Du nombre des *Mathématiques* mixtes, ſont la Méchanique, l'Optique, l'Aſtronomie, la Géographie, la Chronologie, l'Architecture militaire, l'Hydroſtatique, l'Hydraulique, l'Hydrographie ou Navigation, *&c. Voyez* ces mots. *Voyez* auſſi le ſyſtème figuré des connoiſſances humaines, qui eſt à la tête de cet ouvrage, & l'explication de ce ſyſtème, immédiatement à la ſuite du diſcours préliminaire; toutes les diviſions des *Mathématiques* y ſont détaillées, ce qui nous diſpenſe de les rappeller ici.

Nous avons pluſieurs cours de *Mathématiques*; le plus eſtimé eſt celui de M. Wolf, en 5. vol. *in*-4°. mais il n'eſt pas exempt de fautes. *Voyez* COURS & ÉLEMENS DES SCIENCES. A l'égard de l'hiſtoire de cette ſcience, nous avons à préſent tout ce que nous pouvons deſirer ſur ce ſujet, depuis l'ouvrage que M. de Montucla a publié en deux volumes *in*-4°. ſous le titre d'*hiſtoire des Mathématiques*, & qui comprend juſqu'à la fin du xvij[e] ſiecle.

Quant à l'utilité des *Mathématiques*, *voyez* les différens articles déja cités; & ſur-tout les article GEOMÉTRIE & GEOMETRE. (*A*)

Nous dirons ſeulement ici, que ſi pluſieurs écrivains ont voulu conteſter aux *Mathématiques* leur utilité réelle, ſi bien prouvée par la préface de l'hiſtoire de l'académie des Sciences, il y en a eu d'autres qui ont cherché dans ces ſciences des objets d'utilités frivoles ou ridicules. On peut en voir un léger détail dans l'*hiſtoire des Mathématiques* de M. Montucla, *tome I. p. 37. & 38.* Cela me rappelle le trait d'un chirurgien, qui, voulant prouver la néceſſité que les Chirurgiens ont d'être lettrés, prétend qu'un chirurgien qui n'a pas fait ſa rhétorique, n'eſt pas en état de perſuader à un malade de ſe faire ſaigner lorſqu'il en a beſoin.

Nous ne nous étendrons pas ici davantage ſur ces différens ſujets, non plus que ſur les différentes branches des *Mathématiques*, pour ne point répéter ce que nous avons déja dit, ou ce que nous dirons ailleurs. *Voyez* auſſi l'*article* PHYSICO-MATHÉMATIQUES.

Différentes branches des *Mathématiques* ſe diviſent encore en ſpéculatives & pratiques. *Voyez* ASTRONOMIE, GEOMÉTRIE, *&c.* (*O*)

GÉOMETRE, s. m. (*Mathématiq.*) ſe dit proprement d'une perſonne verſée dans la Géométrie; mais on appliqué en général ce nom à tout mathématicien, parce que la Géometrie étant une partie eſſentielle des Mathématiques, & qui a ſur preſque toutes les autres une influence néceſſaire, il eſt difficile d'être verſé profondément dans quelque partie des Mathématiques que ce ſoit, ſans l'être en même tems dans la Géometrie. Ainſi on dit de Newton qu'il étoit grand *géometre*, pour dire qu'il étoit grand mathématicien.

Un *géometre*, quand il ne voudroit que ſe borner à entendre ce qui a été trouvé par d'autres, doit avoir pluſieurs qualités aſſez rares; la juſteſſe de l'eſprit pour ſaiſir les raiſonnemens & démêler les paralogiſmes, la facilité de la conception pour entendre avec promptitude, l'étendue pour embraſſer à-la-fois les différentes parties d'une démonſtration compliquée, la mémoire pour retenir les propoſitions principales, leurs démonſtrations mêmes, ou du-moins l'eſprit de ces démonſtrations, & pour pouvoir en cas de beſoin ſe rappeller les unes & les autres, & en faire uſage. Mais le *géometre* qui ne ſe contentera pas de ſavoir ce qui a été fait avant lui, & qui veut ajoûter aux découvertes de ſes prédéceſſeurs, doit joindre à ces différentes parties de l'eſprit d'autres qualités encore moins communes, la profondeur, l'invention, la force, & la ſagacité.

Je ne ſuis pas éloigné de penſer avec quelques écrivains modernes, que l'on peut apprendre la Géométrie aux enfans, & qu'ils ſont capables de s'appliquer à cette ſcience, pourvû qu'on ſe borne aux ſeuls élémens, qui étant peu compliqués, ne demandent qu'une conception ordinaire; mais ces qualités médiocres ne ſuffiſent pas dans l'étude des Mathématiques tranſcendantes: pour être un *ſavant géometre*, & même pour n'être que cela, il faut un degré d'eſprit beaucoup moins commun; & pour être un *grand géometre* (car le nom de *grand* ne doit être donné qu'aux inventeurs), il faut plus que de l'eſprit, il faut du génie, le génie n'étant autre choſe que le talent d'inventer. Il eſt vrai que l'eſprit dont nous parlons eſt différent de celui qu'il faut pour une épigramme, pour un poëme, pour une piece d'éloquence, pour écrire l'hiſtoire; mais n'y a-t-il donc d'eſprit que de cette derniere eſpece? *Voyez* ESPRIT. Et un écrivain médiocre, ou même un bon écrivain, croira-t-il avoir plus d'eſprit que Newton & que Deſcartes?

Peut-être nous ſera-t-il permis de rapporter à cette occaſion une réponſe de feu M. de la Motte. Un *géometre* de ſes amis, apparemment ignorant ou de mauvaiſe foi, parloit avec mépris du grand Newton, qu'il auroit mieux fait d'étudier; *Newton*, diſoit ce *géometre*, *n'étoit qu'un bœuf; cela ſe peut*, répondit la Motte, *mais c'étoit le premier bœuf de ſon ſiecle.*

On pourroit demander s'il a fallu plus d'eſprit pour faire Cinna, Heraclius, Rodogune, Horace, & Polieucte, que pour trouver les lois de la gravitation. Cette queſtion n'eſt pas ſuſceptible d'être réſolue, ces deux genres d'eſprit étant trop différens pour être comparés; mais on peut demander s'il n'y a pas autant de mérite à l'un qu'à l'autre; & qui auroit à choiſir d'être Newton ou Corneille, feroit bien d'être embarraſſé, ou ne mériteroit pas d'avoir à choiſir. Au reſte cette queſtion eſt décidée tous les jours par quelques littérateurs obſcurs, quelques ſatyriques ſubalternes, qui mépriſent ce qu'ils ignorent, & qui ignorent ce qu'ils croyent ſavoir; incapables, je ne dis pas d'apprétier Corneille, & de lire Newton, mais de juger Campiſtron & d'entendre Euclide.

Si l'eſprit néceſſaire au *géometre* n'eſt pas le même que celui dont on a beſoin pour réuſſir dans la Littérature, ils ne s'excluent pas l'un l'autre. Néanmoins quand on veut loüer parmi nous un mathématicien, on dit de lui qu'il eſt grand *géometre*, & *cependant* homme d'eſprit & de goût; on croit lui faire beaucoup d'honneur, & on ſe ſait quelque gré du bon mot qu'on s'imagine avoir dit. Ces façons de parler ſi connues, *lourd comme un géometre*, *ignorant comme un poëte, ou comme un prédicateur*, ſont devenues des eſpeces de proverbes, & preſque des phraſes de la langue, auſſi équitables l'une que l'autre; les exemples qui en prouvent l'injuſtice ne ſont pas rares; & pour ne parler ici que des Mathématiciens, Paſcal à qui la Géométrie doit un ſi bel ouvrage ſur la Cycloïde, & qui auroit peut-être été le plus grand *géometre* de l'univers, ſi une dévotion aſſez mal entendue ne lui eût fait abandonner ſon talent, Paſcal étoit en même tems un très-bel eſprit. Ses Provinciales ſont un chef-d'œuvre de plaiſanterie & d'éloquence, c'eſt-à-dire un modele dans les deux genres d'écrire qui paroiſſent les plus oppoſés. On dira peut-être que Paſcal n'eſt qu'une exception; il eſt malheureux que l'exception démente ſi formellement la regle qu'on voudroit établir; mais croit-on que cette exception ſoit la ſeule? Nous ne citerons point M. de Fontenelle, qu'on voudra peut-être ne regarder que comme un bel eſprit devenu *géometre* par accident : mais nous renverrons les détracteurs de la Géométrie aux ouvrages philoſophiques de Deſcartes, ſi bien écrits pour leur tems; à ceux de Malebranche, qui ſont des chefs-d'œuvre de ſtyle; aux poéſies de Manfredi, que M. de Fontenelle a ſi juſtement célebrées; aux vers que M. Halley a mis à la tête des principes de Newton, & à tant d'autres que nous pourrions nommer encore. Si ces *géometres* n'étoient pas des hommes d'eſprit, qu'on nous diſe en quoi l'eſprit conſiſte, & à quoi il ſe borne.

On connoît la ridicule queſtion du P. Bouhours, *ſi un allemand peut avoir de l'eſprit?* Les Allemands y ont répondu comme ils le devoient, par cette queſtion non moins ridicule, *ſi un françois peut avoir le ſens commun?* Ceux qui font aux *Géometres* le même honneur que le P. Bouhours a fait aux Allemands, mériteroient qu'on leur demandât auſſi, *ſi on peut ignorer la Géométrie, & raiſonner juſte?* Mais ſans répondre aux injures par d'autres, oppoſons-y des faits. Balzac étoit ſans doute un bel eſprit, dans le ſens où l'on prend ordinairement ce mot; qu'on liſe les lettres de Deſcartes à Balzac, & celles de Balzac à Deſcartes, & qu'on décide enſuite, ſi on eſt de bonne foi, lequel des deux eſt l'homme d'eſprit.

Deſcartes, dit-on, fit en Suede d'aſſez mauvais vers pour un divertiſſement donné à la reine Chriſtine; mais c'étoit en 1649; & à l'exception de Corneille, qui même ne réuſſiſſoit pas toûjours, quelqu'un faiſoit-il alors de bons vers en Europe? Les premiers opéras de l'abbé Perrin ne valoient peut-être pas mieux que le divertiſſement de Deſcartes. Paſcal, ajoûte-t-on, a très-mal raiſonné ſur la Poéſie; cela eſt vrai, mais que s'enſuit-il de-là? C'eſt que Paſcal ne ſe connoiſſoit pas en vers, faute peut-être d'en avoir aſſez lû, & d'avoir réfléchi ſur ce genre; la Poéſie eſt un art d'inſtitution qui demande quelqu'exercice & quelque habitude pour en bien juger; or Paſcal n'avoit lû que des livres de Géométrie & de piété, & peut-être de mauvais vers de dévotion qui l'avoient prévenu contre la Poéſie en général; mais ſes provinciales prouvent qu'il avoit d'ailleurs le tact très-fin & le goût très-juſte. On n'y trouve pas un terme ignoble, un mot qui ait vieilli, une plaiſanterie froide.

La Géométrie, dit-on encore, donne à l'eſprit de la ſéchereſſe; oui, quand on y eſt déjà préparé par la nature : en ce cas, on ne feroit guere plus ſenſible aux beautés des ouvrages d'imagination, quand même on n'auroit fait aucune étude de la Géométrie; mais celui à qui la nature aura donné avec le talent des Mathématiques un eſprit flexible à d'autres objets, & qui aura ſoin d'entretenir dans ſon eſprit cette heureuſe flexibilité, en le pliant en tout ſens, en ne le tenant point toûjours courbé vers les lignes & les calculs, & en l'exerçant à des matieres de littérature, de goût, & de philoſophie, celui-là conſervera tout-à-la-fois la ſenſibilité pour les choſes d'agrément, & la rigueur néceſſaire aux démonſtrations; il ſaura réſoudre un problème, & lire un poëte; calculer les mouvemens des planetes, & avoir du plaiſir à une piece de théatre.

L'étude & le talent de la Géométrie ne nuiſent donc point par eux mêmes aux talens & aux occupations littéraires. On peut même dire en un ſens, qu'ils ſont utiles pour quelque genre d'écrire que ce puiſſe être; un ouvrage de morale, de littérature, de critique, en ſera meilleur, *toutes choſes d'ailleurs égales*, s'il eſt fait par un *géometre*, comme M. de Fontenelle l'a très-bien obſervé; on y remarquera cette juſteſſe & cette liaiſon d'idées à laquelle l'étude de la Géométrie nous accoûtume, & qu'elle nous fait enſuite porter dans nos écrits ſans nous en appercevoir & comme malgré nous.

L'étude de la Géométrie ne peut ſans doute rendre l'eſprit juſte à celui qui ne l'a pas; mais auſſi un eſprit ſans juſteſſe n'eſt pas fait pour cette étude, il n'y réuſſira point; c'eſt pourquoi ſi on a eu raiſon de dire que *la Géométrie ne redreſſe que les eſprits droits*, on auroit bien fait d'ajoûter que *les eſprits droits ſont les ſeuls propres à la Géométrie*.

On ne peut donc avoir l'eſprit *géometre*, c'eſt-à-dire le talent de la Géométrie, ſans avoir en même tems l'eſprit *géométrique*, c'eſt-à-dire l'eſprit de méthode & de juſteſſe. Car l'eſprit *géometre* n'eſt proprement que l'eſprit *géométrique*, appliqué à la ſeule Géométrie, & il eſt bien difficile quand on ſait faire uſage de cet eſprit dans les matieres géométriques, qu'on ne puiſſe de même le tourner avec un ſuccès égal vers d'autres objets. Il eſt vrai que l'eſprit géometrique pour ſe développer avec toute ſa force & ſon activité, demande quelqu'exercice; & c'eſt pour cela qu'un homme concentré dans l'étude de la Géométrie, paroîtra n'avoir que l'eſprit *géometre*, parce qu'il n'aura pas appliqué à d'autres matieres le talent que la nature lui a donné de raiſonner juſte. De plus ſi les *Géometres* ſe trompent lorſqu'ils appliquent leur logique à d'autres ſciences que la Géométrie, leur erreur eſt plûtôt dans les principes qu'ils adoptent, que dans les conſéquences qu'ils en tirent. Cette erreur dans les principes peut venir ou de ce que le *géometre* n'a pas les connoiſſances préliminaires ſuffiſantes pour le conduire aux principes véritables, ou de ce que les principes de la ſcience dont il traite ne ſortent point de la ſphere des probabilités. Alors il peut arriver qu'un eſprit accoûtumé aux démonſtrations rigoureuſes, n'ait pas à un degré ſuffiſant le tact néceſſaire pour diſtinguer ce qui eſt plus probable d'avec ce qui l'eſt moins. Cependant j'oſe penſer encore qu'un *géometre* exercé à l'evidence mathématique, diſtinguera plus aiſément dans les autres ſciences ce qui eſt vraiment évident d'avec ce qui n'eſt que vraiſſemblable & conjectural ; & que de plus ce même *géometre* avec quelque exercice & quelque habitude, diſtinguera auſſi plus aiſément ce qui eſt plus probable d'avec ce qui l'eſt moins ; car la Géométrie a auſſi ſon calcul des probabilités.

A l'occaſion de ce calcul, je crois devoir faire une réflexion qui contredira un peu l'opinion commune ſur l'eſprit du jeu. On imagine pour l'ordinaire qu'un *géometre*, un ſavant exercé aux calculs, doit avoir l'eſprit du jeu dans un degré ſupérieur ; il me ſemble que ces deux eſprits ſont fort différens, ſi même ils ne ſont pas contraires. L'eſprit *géometre* eſt ſans doute un eſprit de calcul & de combinaiſon, mais de combinaiſon ſcrupuleuſe & lente, qui examine l'une après l'autre toutes les parties de l'objet, & qui les compare ſucceſſivement entr'elles, prenant garde de n'en omettre aucune, & de les rapprocher par toutes leurs faces ; en un mot ne faiſant à-la-fois qu'un pas, & ayant ſoin de le bien aſſûrer avant que de paſſer au ſuivant. L'eſprit du jeu eſt un eſprit de combinaiſon rapide, qui embraſſe d'un coup-d'œil & comme d'une maniere vague un grand nombre de cas, dont quelques-uns peuvent lui échapper, parce qu'il eſt moins aſſujetti à des regles, qu'il n'eſt une eſpece d'inſtinct perfectionné par l'habitude. D'ailleurs le *géometre* peut ſe donner tout le tems néceſſaire pour réſoudre ſes problèmes ; il fait un effort, ſe repoſe, & repart de-là avec de nouvelles forces. Le joüeur eſt obligé de réſoudre ſes problèmes ſur le champ, & de faire dans un tems donné & très-court tout l'uſage poſſible de ſon eſprit. Il n'eſt donc pas ſurprenant qu'un grand *géometre* ſoit un joüeur très-médiocre ; & rien n'eſt en effet plus commun.

La Géométrie a parmi nous des cenſeurs de tous les genres. Il en eſt qui lui conteſtent juſqu'à ſon utilité ; nous les renvoyons à la *préface* ſi connue de l'hiſtoire de l'académie des Sciences, où les mathématiques ſont ſuffiſamment vengées de ce reproche. Mais indépendamment des uſages phyſiques & palpables de la Géométrie, nous enviſagerons ici ſes avantages ſous une autre face, à laquelle on n'a peut-être pas fait encore aſſez d'attention : c'eſt l'utilité dont cette étude peut être pour préparer comme inſenſiblement les voies à l'eſprit philoſophique, & pour diſpoſer toute une nation à recevoir la lumiere que cet eſprit peut y répandre. C'eſt peut-être le ſeul moyen de faire ſecoüer peu-à-peu à certaines contrées de l'Europe, le joug de l'oppreſſion & de l'ignorance profonde ſous laquelle elles gémiſſent. Le petit nombre d'hommes éclairés qui habitent certains pays d'inquiſition, ſe plaint amerement quoiqu'en ſecret, du peu de progrès que les Sciences ont fait juſqu'ici dans ces triſtes climats. Les précautions qu'on a priſes pour empêcher la lumiere d'y pénétrer, ont ſi bien réuſſi, que la Philoſophie y eſt à-peu-près dans le même état où elle étoit parmi nous du tems de Louis le Jeune. Il eſt certain que les abus les plus intolérables d'un tribunal qui nous a toûjours ſi juſtement révoltés, ne ſe ſont produits & ne s'entretiennent que par l'ignorance & la ſuperſtition. Eclairez la nation, & les miniſtres de ces tribunaux renonceront d'eux-mêmes à des excès dont ils auront les premiers reconnu l'injuſtice & les inconvéniens. C'eſt ce que nous avons vû arriver dans les pays où le goût des Arts & des Sciences & les lumieres de la Philoſophie ſe ſont conſervés. On étudie & on raiſonne en Italie ; & l'inquiſition y a beaucoup rabattu de la tyrannie qu'elle exerce dans ces régions, ou l'on fait encore prêter ſerment de ne point enſeigner d'autre philoſophie que celle d'Ariſtote. Faites naître, s'il eſt poſſible, des *géometres* parmi ces peuples ; c'eſt une ſemence qui produira des philoſophes avec le tems, & preſque ſans qu'on s'en apperçoive. L'orthodoxie la plus délicate & la plus ſcrupuleuſe n'a rien à démêler avec la Géométrie. Ceux qui croiroient avoir intérêt de tenir les eſprits dans les ténebres, fuſſent-ils aſſez prévoyans pour preſſentir la ſuite des progrès de cette ſcience, manqueroient toûjours de prétexte pour l'empêcher de ſe répandre. Bien-tôt l'étude de la Géométrie conduira à celle de la méchanique ; celle-ci menera comme d'elle-même & ſans obſtacle, à l'étude de la ſaine Phyſique ; & enfin la ſaine Phyſique à la vraie Philoſophie, qui par la lumiere générale & prompte qu'elle répandra, ſera bien-tôt plus puiſſante que tous les efforts de la ſuperſtition ; car ces efforts, quelque grands qu'ils ſoient, deviennent inutiles dès qu'une fois la nation eſt éclairée.

Croira-t-on que nous parlons ſérieuſement, ſi nous employons les dernieres lignes de cet article à juſtifier les *Géometres* du reproche qu'on leur fait d'ordinaire, de n'être pas fort portés à la ſoûmiſſion en matiere de foi ? Nous aurions honte de répondre à cette imputation, ſi elle n'étoit malheureuſement auſſi commune qu'elle eſt injuſte. Bayle qui doutoit & ſe moquoit de tout, n'a pas peu contribué à la répandre par les réflexions malignes qu'il a haſardées dans l'article Paſcal, contre l'orthodoxie des Mathématiciens, & par ſes lamentations ſur le malheur que les *Géometres* ont eu juſqu'ici de ne voir aucun de leurs noms dans le calendrier ; lamentations trop peu ſérieuſes pour être rapportées dans un ouvrage auſſi grave que celui-ci. Sans répondre à cette mauvaiſe plaiſanterie par quelqu'autre, il eſt facile de ſe convaincre par la lecture des éloges académiques de M. de Fontenelle, par les vies de Deſcartes, de Paſcal, & de pluſieurs mathématiciens célebres, qu'on peut être *géometre* ſans être pour ſes freres un ſujet de ſcandale. La Géométrie à la vérité ne nous diſpoſe pas à ajoûter beaucoup de foi aux raiſonnemens de la Medecine ſyſtématique, aux hypothèſes des phyſiciens ignorans, aux ſuperſtitions & aux prejugés populaires ; elle accoûtume à ne pas ſe contenter aiſément en matiere de preuves : mais les vérités que la révélation nous découvre, ſont ſi différentes de celles que la raiſon nous apprend, elles y ont ſi peu de rapport, que l'évidence des unes ne doit rien prendre ſur le reſpect qu'on doit aux autres. Enfin la foi eſt une grace que Dieu donne à qui il lui plaît ; & puiſque l'Evangile n'a point défendu l'étude de la Géométrie, il eſt à croire que les *Géometres* ſont auſſi ſuſceptibles de cette grace que le reſte du genre humain. (*O*)

GÉOMÉTRIE, s. f. (*Ordre encycl. Entend. Rais. Philoſoph.* ou *Science, Science de la Nat. Mathémath. Mathémath. pures, Géométrie.*) eſt la ſcience des propriétés de l'étendue, en tant qu'on la conſidere comme ſimplement étendue & figurée.

Ce mot eſt formé de deux mots grecs, γῆ ou γαῖα, *terre*, & μέτρον, *meſure* ; & cette étymologie ſemble nous indiquer ce qui a donné naiſſance à la *Géométrie* : imparfaite & obſcure dans ſon origine comme toutes les autres ſciences, elle a commencé par une eſpece de tatonnement, par des meſures & des opérations groſſieres, & s'eſt élevée peu-à-peu à ce degré d'exactitude & de ſublimité où nous la voyons.

Hiſtoire abregée de la Géométrie. Il y a apparence que la *Géométrie*, comme la plûpart des autres ſciences, eſt née en Egypte, qui paroît avoir été le berceau des connoiſſances humaines, ou, pour parler plus exactement, qui eſt de tous les pays que nous connoiſſons, celui où les Sciences paroiſſent avoir été le plus anciennement cultivées. Selon Hérodote & Strabon, les Egyptiens ne pouvant reconnoître les bornes de leurs héritages confondues par les inondations du Nil, inventerent l'art de meſurer & de diviſer les terres, afin de diſtinguer les leurs par la conſidération de la figure qu'elles avoient, & de la ſurface qu'elles pouvoient contenir. Telle fut, dit-on, la premiere aurore de la *Géométrie*. Joſephe, hiſtorien zélé pour ſa nation, en attribue l'invention aux Hébreux; d'autres à Mercure. Que ces faits ſoient vrais ou non, il paroît certain que quand les hommes ont commencé à poſſéder des terres, & à vivre ſous des lois différentes, ils n'ont pas été long-tems ſans faire ſur le terrein quelques opérations pour le meſurer, tant en longueur qu'en ſurface, en entier ou par parties; & voilà la *Géométrie* dans ſon origine.

De l'Egypte elle paſſa en Grece, où on prétend que Thalès la porta. Il ne ſe contenta pas d'apprendre aux Grecs ce qu'il avoit reçû des Egyptiens; il ajoûta à ce qu'il avoit appris, & enrichit cette ſcience de pluſieurs propoſitions. Après lui vint Pythagore, qui cultiva auſſi la *Géométrie* avec ſuccès, & à qui on attribue la fameuſe propoſition du quarré de l'hypothénuſe. *Voyez* HYPOTHÉNUSE. On prétend qu'il fut ſi ravi de cette découverte, qu'il ſacrifia de joie cent bœufs aux Muſes. Il y a apparence, dit un auteur moderne, que c'étoient des bœufs de cire ou de pâte; car Pythagore défendoit de tuer les animaux, en conſéquence de ſon ſyſtème de la métempſycoſe, qui (pour un philoſophe payen) n'étoit pas l'opinion du monde la plus abſurde. *Voyez* MÉTEMPSYCOSE. Mais il y a plus d'apparence encore que le fait n'eſt pas vrai; ce qui diſpenſe de l'expliquer. Après Pythagore, les philoſophes & les écoles qu'ils formerent, continuerent à cultiver l'étude de la *Géométrie*. Plutarque nous apprend qu'Anaxagore de Clazomene s'occupa du problème de la quadrature du cercle dans la priſon où il avoit été renfermé, & qu'il compoſa même un ouvrage ſur ce ſujet. Cet Anaxagore avoit été accuſé d'impiété, pour avoir dit que les aſtres étoient matériels; & il eût été condamné à mort, ſans Periclès qui lui ſauva la vie. On voit par cet exemple, s'il eſt permis de le dire en paſſant, que ce n'eſt pas d'aujourd'hui que les Philoſophes ſont perſécutés pour avoir eu raiſon; & que les prêtres grecs étoient auſſi habiles que certains théologiens modernes, à ériger en articles de religion ce qui n'en étoit pas.

Platon qui donnoit à Anaxagore de grands éloges ſur ſon habileté en *Géométrie*, en méritoit auſſi beaucoup lui-même. On ſait qu'il donna une ſolution très ſimple du problème de la duplication du cube. *Voyez* DUPLICATION. On ſait auſſi que ce grand philoſophe appelloit Dieu l'*éternel géometre* (idée vraiment juſte & digne de l'Être ſuprème), & qu'il regardoit la *Géométrie* comme ſi néceſſaire à l'étude de la Philoſophie, qu'il avoit écrit ſur la porte de ſon école ces paroles mémorables, *qu'aucun ignorant en Géométrie n'entre ici*. Entre Anaxagore & Platon, on doit placer Hippocrate de Chio, qui mérite qu'on en faſſe mention par ſa fameuſe quadrature de la lunule. *Voyez* LUNULE. Feu M. Cramer, profeſſeur de Philoſophie à Genève, nous a donné dans les mémoires de l'académie des Sciences de Pruſſe pour l'année 1748, une très-bonne diſſertation ſur ce géometre : on y lit qu'Hippocrate dans un voyage qu'il fit à Athenes, ayant eu occaſion d'écouter les philoſophes, prit tant de goût pour la *Géométrie*, qu'il y fit des progrès admirables; on ajoûte que cette étude développa ſon talent, & qu'il avoit pour tout le reſte l'eſprit lent & bouché; ce qu'on raconte auſſi de Clavius, bon géometre du ſeizieme ſiecle. Il n'y a rien d'étonnant à tout cela; mais le comble de l'ineptie eſt d'en faire une regle. *Voyez* GÉOMETRE.

Euclide qui vivoit environ cinquante ans après Platon, & qu'il ne faut pas confondre avec Euclide de Megare contemporain de ce philoſophe, recueillit ce que ſes prédéceſſeurs avoient trouvé ſur les élémens de *Géométrie*; il en compoſa l'ouvrage que nous avons de lui, & que bien des modernes regardent comme le meilleur en ce genre. Dans ces élémens il ne conſidere que les propriétés de la ligne droite & du cercle, & celles des ſurfaces & des ſolides rectilignes ou circulaires; ce n'eſt pas néanmoins que du tems d'Euclide il n'y eût d'autre courbe connue que le cercle; les Géometres s'étoient déjà apperçus qu'en coupant un cone de différentes manieres, on formoit des courbes différentes du cercle, qu'ils nommerent *ſections coniques*. *Voy.* CONIQUE & SECTION. Les différentes propriétés de ces courbes, que pluſieurs mathématiciens découvrirent ſucceſſivement, furent recueillis en huit livres par Apollonius de Perge, qui vivoit environ 250 ans avant J. C. *Voyez* APOLLONIEN. Ce fut lui, à ce qu'on prétend, qui donna aux trois ſections coniques les noms qu'elles portent, de *parabole*, *d'ellipſe*, & *d'hyperbole*, & dont on peut voir les raiſons à leurs articles. A-peu-près en même tems qu'Apollonius, floriſſoit Archimede, dont nous avons de ſi beaux ouvrages ſur la ſphere & le cylindre, ſur les conoïdes & les ſphéroïdes, ſur la quadrature du cercle qu'il trouva par une approximation très-ſimple & très-ingénieuſe (*Voyez* QUADRATURE), & ſur celle de la parabole qu'il détermina exactement. Nous avons auſſi de lui un traité de la ſpirale, qui peut paſſer pour un chef-d'œuvre de ſagacité & de pénétration. Les démonſtrations qu'il donne dans cet ouvrage, quoique très-exactes, ſont ſi difficiles à embraſſer, qu'un ſavant mathématicien moderne, Bouillaud, avoue ne les avoir jamais bien entendues, & qu'un mathématicien de la plus grande force, notre illuſtre Viete, les a injuſtement ſoupçonnées de paralogiſme, faute de les avoir bien compriſes. *Voyez la préface de l'analyſe des infiniment petits* de M. de l'Hôpital. Dans cette préface, qui eſt l'ouvrage de M. de Fontenelle, on a rapporté les deux paſſages de Bouillaud & de Viete, qui vérifient ce que nous avançons ici. On doit encore à Archimede d'autres écrits non moins admirables, qui ont rapport à la Méchanique plus qu'à la *Géométrie*, de *æquiponderantibus*, de *inſidentibus humido*; & quelques autres dont ce n'eſt pas ici le lieu de faire mention.

Nous ne parlons dans cette hiſtoire que des Géometres dont il nous reſte des écrits que le tems a épargnés; car s'il falloit nommer tous ceux qui dans l'antiquité ſe ſont diſtingués en *Géométrie*, la liſte en ſeroit trop longue; il faudroit faire mention d'Eudoxe de Cnide, d'Archytas de Tarente, de Philolaüs, d'Eratoſthene, d'Ariſtarque de Samos, de Dinoſtrate ſi connu par ſa quadratrice

(*Voyez* QUADRATRICE), de Menechme ſon frere, diſciple de Platon, des deux Ariſtées, l'ancien & le jeune, de Conon, de Thraſidée, de Nicotele, de Leon, de Theudius, d'Hermotime, de Nicomede, inventeur de la conchoïde (*V.* CONCHOÏDE), & un peu plus jeune qu'Archimede & qu'Apollonius, & de pluſieurs autres.

Les Grecs continuerent à cultiver la Philoſophie, la *Géométrie*, & les Lettres, même après qu'ils eurent été ſubjugués par les Romains. La *Géométrie* & les Sciences en général, ne furent pas fort en honneur chez ce dernier peuple qui ne penſoit qu'à ſubjuguer & à gouverner le monde, & qui ne commença guere à cultiver l'éloquence même que vers la fin de la république. On a vû dans l'*article* ERUDITION avec quelle legereté Ciceron parle d'Archimede, qui pourtant ne lui étoit point inférieur; peut-être même eſt-ce faire quelque tort à un génie auſſi ſublime qu'Archimede, de ne le placer qu'à côté d'un bel eſprit, qui dans les matieres philoſophiques qu'il a traitées, n'a guere fait qu'expoſer en longs & beaux diſcours, les chimeres qu'avoient penſées les autres. On étoit ſi ignorant à Rome ſur les Mathématiques, qu'on donnoit en général le nom de *mathématiciens*, comme on le voit dans Tacite, à tous ceux qui ſe mêloient de deviner, quoiqu'il y ait encore plus de diſtance des chimeres de la Divination & de l'Aſtrologie judiciaire aux Mathématiques, que de la pierre philoſophale à la Chimie. Ce même Tacite, un des plus grands eſprits qui ayent jamais écrit, nous donne par ſes propres ouvrages une preuve de l'ignorance des Romains, dans les queſtions de *Géométrie* & d'Aſtronomie les plus élémentaires & les plus ſimples. Il dit dans la vie d'Agricola, en faiſant la deſcription de l'Angleterre, que vers l'extrémité ſeptentrionale de cette ile, les grands jours d'été n'ont preſque point de nuit; & voici la raiſon qu'il en apporte: *ſcilicet extrema & plana terrarum humili umbra non erigunt tenebras, infràque cœlum & ſydera nox cadit.* Nous n'entreprendrons point avec les commentateurs de Tacite, de donner un ſens à ce qui n'en a point; nous nous contenterons d'avoir montré par cet exemple, que la manie d'étaler un faux ſavoir & de parler de ce qu'on n'entend pas, eſt fort ancienne. Un traducteur de Tacite dit que cet hiſtorien regarde la Terre dans ce paſſage comme *une ſphere dont la baſe eſt environnée d'eau, &c.* Nous ne ſavons ce que c'eſt que la baſe d'une ſphere.

Si les Romains cultiverent peu la *Géometrie* dans les tems les plus floriſſans de la république, il n'eſt pas ſurprenant qu'ils l'ayent encore moins cultivée dans la décadence de l'empire. Il n'en fut pas de même des Grecs; ils eurent depuis l'ere chrétienne même, & aſſez long-tems après la tranſlation de l'empire, des géometres habiles. Ptolomée grand aſtronome & par conſéquent grand géometre, car on ne peut être l'un ſans l'autre, vivoit ſous Marc-Aurele; & on peut voir au *mot* ASTRONOMIE, les noms de pluſieurs autres. Nous avons encore les ouvrages de Pappus d'Alexandrie, qui vivoit du tems de Théodoſe; Eutocius Aſcalonite, qui vivoit après lui vers l'an 540 de l'ere chrétienne, nous a donné un commentaire ſur la meſure du cercle par Archimede. Proclus qui vivoit ſous l'empire d'Anaſtaſe au cinquieme & ſixieme ſiecles, démontra les théoremes d'Euclide, & ſon commentaire ſur cet auteur eſt parvenu juſqu'à nous. Ce Proclus eſt encore plus fameux par les miroirs (vrais ou ſuppoſés) dont il ſe ſervit, dit-on, pour brûler la flotte de Vitalien qui aſſiégeoit Conſtantinople. *Voyez* ARDENT & MIROIR. Entre Eutocius & Pappus, il y a apparence qu'on doit placer Dioclès, connu par ſa ciſſoïde (*Voyez* CISSOÏDE), mais dont on ne connoît guere que le nom, car on ne ſait pas préciſément le tems où il a vécu.

L'ignorance profonde qui couvrit la ſurface de la Terre & ſurtout l'Occident, depuis la deſtruction de l'empire par les Barbares, nuiſit à la *Géométrie* comme à toutes les autres connoiſſances; on ne trouve plus guere ni chez les Latins, ni même chez les Grecs, d'hommes verſés dans cette partie; il y en eut ſeulement quelques-uns qu'on appelloit ſavans, parce qu'ils étoient moins ignorans que les autres, & quelques-uns de ceux-là, comme Gerbert, paſſerent pour magiciens; mais s'ils eurent quelque connoiſſance des découvertes de leurs prédéceſſeurs, il n'y ajoûterent rien, du-moins quant à la *Géométrie*; nous ne connoiſſons aucun théoreme important dont cette ſcience leur ſoit redevable: c'étoit principalement par rapport à l'Aſtronomie qu'on étudioit alors le peu de *Géométrie* qu'on vouloit ſavoir, & c'étoit principalement par rapport au calendrier & au comput eccléſiaſtique qu'on étudioit l'Aſtronomie; ainſi l'étude de la *Géométrie* n'étoit pas pouſſée fort loin. On peut voir au *mot* ASTRONOMIE, les noms des principaux mathématiciens des ſiecles d'ignorance. Il en eſt un que nous ne devons pas oublier; c'eſt Vitellion ſavant polonois du treizieme ſiecle, dont nous avons un traité d'Optique très-eſtimable pour ce tems-là, & qui ſuppoſe des connoiſſances géométriques. Ce Vitellion nous rappelle l'arabe Alhazen, qui vivoit environ un ſiecle avant lui, & qui cultivoit auſſi les Mathématiques avec ſuccès. Les ſiecles d'ignorance chez les Chrétiens ont été les ſiecles de lumiere & de ſavoir chez les Arabes; cette nation a produit depuis le 9^{e} juſqu'au 14^{e} ſiecle, des aſtronomes, des géometres, des géographes, des chimiſtes, *&c.* Il y a apparence qu'on doit aux Arabes les premiers élémens de l'Algebre: mais leurs ouvrages de *Géométrie* dont il eſt ici principalement queſtion, ne ſont point parvenus juſqu'à nous pour la plûpart, ou ſont encore manuſcrits. C'eſt ſur une traduction arabe d'Apollonius qu'a été faite en 1661 l'édition du cinquieme, du ſixieme & du ſeptieme livre de cet auteur. *Voyez* APOLLONIEN. Cette traduction étoit d'un géometre arabe nommé *Abalphat*, qui vivoit à la fin du dixieme ſiecle. Il n'y avoit peut-être pas alors parmi les Chrétiens un ſeul géometre qui fût en état d'entendre Apollonius; il auroit fallu d'ailleurs pour le traduire ſavoir en même tems le grec & la *Géométrie*, ce qui n'eſt pas fort commun, même dans notre ſiecle.

A la renaiſſance des lettres, on ſe borna preſque uniquement à traduire & à commenter les ouvrages de *Géométrie* des anciens; & cette ſcience fit d'ailleurs peu de progrès juſqu'à Deſcartes: ce grand homme publia en 1637 ſa *géométrie*, & la commença par la ſolution d'un probleme où Pappus dit que les anciens mathématiciens étoient reſtés. Mais ce qui eſt plus précieux encore que la ſolution de ce problème, c'eſt l'inſtrument dont il ſe ſervit pour y parvenir, & qui ouvrit la route à la ſolution d'une infinité d'autres queſtions plus difficiles. Nous voulons parler de l'application de l'Algebre à la *Géométrie*; application dont nous ferons ſentir le mérite & l'uſage dans la ſuite de cet article: c'étoit là le plus grand pas que la *Géométrie* eût fait depuis Archimede; & c'eſt l'origine des progrès ſurprenans que cette ſcience a faits dans la ſuite.

On doit à Deſcartes non-ſeulement l'application de l'Algebre à la *Géométrie*, mais les premiers eſſais de l'application de la *Géométrie* à la Phyſique, qui a été pouſſée ſi loin dans ces derniers tems. Ces eſſais qui ſe voyent principalement dans ſa *dioptrique*, & dans quelques endroits de ſes *météores*, faiſoient dire à ce philoſophe que toute ſa *phyſique* n'étoit autre choſe que *Géométrie* : elle n'en auroit valu que mieux ſi elle eût eu en effet cet avantage ; mais malheureuſement la phyſique de Deſcartes conſiſtoit plus en hypothèſes qu'en calculs ; & l'Analyſe a renverſé depuis la plûpart de ces hypotheſes. Ainſi la *Géométrie* qui doit tant à Deſcartes, eſt ce qui a nui le plus à ſa phyſique. Mais ce grand homme n'en a pas moins la gloire d'avoir appliqué le premier avec quelque ſuccès la *Géométrie* à la ſcience de la nature ; comme il a le mérite d'avoir penſé le premier qu'il y avoit des lois du mouvement, quoiqu'il ſe ſoit trompé ſur ces lois. *Voyez* COMMUNICATION DU MOUVEMENT.

Tandis que Deſcartes ouvroit dans la *Géométrie* une carriere nouvelle, d'autres mathématiciens s'y frayoient auſſi des routes à d'autres égards, & préparoient, quoique foiblement, cette *Géométrie* de l'infini, qui à l'aide de l'Analyſe, devoit faire dans la ſuite de ſi grands progrès. En 1635, deux ans avant la publication de la *Géométrie* de Deſcartes, Bonaventure Cavalérius, religieux italien de l'ordre des Jéſuites, qui ne ſubſiſte plus, avoit donné ſa *géométrie des indiviſibles* : dans cet ouvrage, il conſidere les plans comme formés par des ſuites infinies de lignes, qu'il appelle *quantités indiviſibles*, & les ſolides par des ſuites infinies de plans ; & par ce moyen, il parvient à trouver la ſurface de certaines figures & la ſolidité de certains corps. Comme l'infini employé à la maniere de Cavalerius étoit alors nouveau en *Géométrie*, & que ce religieux craignoit des contradicteurs, il tâcha d'adoucir ce terme par celui d'*indéfini*, qui au fond ne ſignifioit en cette occaſion que la même choſe. Malgré cette eſpece de palliatif, il trouva beaucoup d'adverſaires, mais il eut auſſi des partiſans ; ceux-ci en adoptant l'idée de Cavalérius la rendirent plus exacte, & ſubſtituerent aux lignes qui compoſoient les plans de Cavalerius, des parallélogrammes infiniment petits ; aux plans indiviſibles de Cavalerius, des ſolides d'une épaiſſeur infiniment petite : ils conſidérerent les courbes comme des polygones d'une infinité de côtés, & parvinrent par ce moyen à trouver la ſurface de certains eſpaces curvilignes, la rectification de certaines courbes, la meſure de certains ſolides, les centres de gravité des uns & des autres : Grégoire de Saint-Vincent, & ſur-tout Paſcal, ſe diſtinguerent l'un & l'autre en ce genre ; le premier, dans ſon traité intitulé, *quadratura circuli & hyperbolæ*, 1647. où il mêla à quelques paralogiſmes de très-beaux théorèmes ; & le ſecond, par ſon traité *de la roulette* ou *cycloïde* (*V.* CYCLOÏDE), qui paroît avoir demandé les plus grands efforts d'eſprit ; car on n'avoit point encore trouvé le moyen de rendre la *Géométrie* de l'infini beaucoup plus facile en y appliquant le calcul.

Cependant le moment de cette heureuſe découverte approchoit ; Fermat imagina le premier la méthode des tangentes par les différences ; Barrow la perfectionna en imaginant ſon petit triangle différentiel, & en ſe ſervant du calcul analytique, pour découvrir le rapport des petits côtés de ce triangle, & par ce moyen la ſous-tangente des courbes. *Voyez* DIFFÉRENTIEL.

D'un autre côté on fit réflexion que les plans ou ſolides infiniment petits, dont les ſurfaces ou les ſolides pouvoient être ſuppoſés formés, croiſſoient ou décroiſſoient dans chaque ſurface ou ſolide, ſuivant différentes lois ; & qu'ainſi la recherche de la meſure de ces ſurfaces ou de ces ſolides ſe réduiſoit à connoitre la ſomme d'une ſérie ou ſuite infinie de quantités croiſſantes ou décroiſſantes. On s'appliqua donc à la recherche de la ſomme des ſuites ; c'eſt ce qu'on appella l'*arithmétique des infinis* ; on parvint à en ſommer pluſieurs, & on appliqua aux figures géométriques les réſultats de cette méthode. Wallis, Mercator, Brouncker, Jacques Grégori, Huyghens, & quelques autres ſe ſignalerent en ce genre ; ils firent plus ; ils réduiſirent certains eſpaces & certains arcs de courbes en ſéries convergentes, c'eſt-à-dire dont les termes alloient toûjours en diminuant ; & par-là ils donnerent le moyen de trouver la valeur de ces eſpaces & de ces arcs, ſinon exactement, au-moins par approximation : car on approchoit d'autant plus de la vraie valeur, qu'on prenoit un plus grand nombre de termes de la ſuite ou ſérie infinie qui l'exprimoit. *Voyez* SUITE, SÉRIE, APPROXIMATION, *&c.*

Tous les matériaux du calcul différentiel étoient prêts ; il ne reſtoit plus que le dernier pas à faire. M. Leibnitz publia le premier en 1684 les regles de ce calcul, que M. Newton avoit déjà trouvées de ſon côté : nous avons diſcuté au *mot* DIFFÉRENTIEL, la queſtion ſi Leibnitz peut être regardé comme inventeur. Les illuſtres freres Bernoulli trouverent les démonſtrations des regles données par Leibnitz ; & Jean Bernoulli y ajoûta quelques années après, la méthode de différentier les quantités exponentielles. *Voyez* EXPONENTIEL.

M. Newton n'a pas moins contribué au progrès de la *Géométrie* pure par deux autres ouvrages ; l'un eſt ſon traité *de quadraturâ curvarum*, où il enſeigne la maniere de quarrer les courbes par le calcul intégral, qui eſt l'inverſe du différentiel ; ou de réduire la quadrature des courbes, lorſque cela eſt poſſible, à celle d'autres courbes plus ſimples, principalement du cercle & de l'hyperbole : le ſecond ouvrage eſt ſon *enumeratio linearum tertii ordinis*, où appliquant heureuſement le calcul aux courbes dont l'équation eſt du 3e degré, il diviſe ces courbes en genres & eſpeces, & en fait l'énumération. *Voyez* COURBE.

Mais ces écrits, quelque admirables qu'ils ſoient, ne ſont rien, pour ainſi dire, en comparaiſon de l'immortel ouvrage du même auteur, intitulé, *Philoſophiæ naturalis principia mathematica*, qu'on peut regarder comme l'application la plus étendue, la plus admirable, & la plus heureuſe qui ait jamais été faite de la *Géométrie* à la Phyſique : ce livre eſt aujourd'hui trop connu pour que nous entrions dans un plus grand détail ; il a été l'époque d'une révolution dans la Phyſique : il a fait de cette ſcience une ſcience nouvelle, toute fondée ſur l'obſervation, l'expérience, & le calcul. *Voyez* NEWTONIANISME, GRAVITATION, ATTRACTION, *&c.* Nous ne parlons point de l'*optique* du même auteur, ouvrage non moins digne d'éloges, mais qui n'appartient point à cet article, ni de quelques autres écrits géométriques moins conſidérables, mais tous de la premiere force, tous brillans de ſagacité & d'invention ; comme ſon *analyſis per æquationes numero terminorum infinitas* ; ſon *analyſis per æquationum ſeries, fluxiones & differentias* ; la *méthode des fluxions* ; ſa *méthode différentielle*, *&c.* Quand on conſidere ces monumens immortels du génie de leur auteur, & quand on ſonge que ce grand homme avoit fait à vingt-quatre ans ſes principales découvertes, on eſt preſque tenté de ſouſcrire à ce que dit Pope, que la ſagacité de Newton étonna les intelligences céleſtes, & qu'ils le regarderent comme un être moyen entre l'homme & elles : on eſt du-moins bien fondé à s'écrier, *homo homini quid præſtat* ! qu'il y a de diſtance entre un homme & un autre !

L'édifice élevé par Newton à cette hauteur immenſe, n'étoit pourtant pas encore achevé ; le calcul intégral a été depuis extrèmement augmenté par MM. Bernoulli, Cotes, Maclaurin, *&c.* & par les mathématiciens qui ſont venus après eux. *Voyez* INTÉGRAL. On a fait des applications encore plus ſubtiles, & ſi on l'oſe dire, plus difficiles, plus heureuſes & plus exactes de la *Géométrie* à la Phyſique. On a beaucoup ajoûté à ce que Newton avoit commencé ſur le ſyſtème du monde : c'eſt ſur-tout quant à cette partie qu'on a corrigé & perfectionné ſon grand ouvrage des *Principes mathématiques.* La plupart des mathématiciens qui ont contribué à enrichir ainſi la *Géométrie* par leurs découvertes, & à l'appliquer à la Phyſique & à l'Aſtronomie, étant aujourd'hui vivans, & nous même ayant peut-être eu quelque part à ces travaux, nous laiſſerons à la poſtérité le ſoin de rendre à chacun la juſtice qu'il mérite : & nous terminerons ici cette petite hiſtoire de la *Géométrie* ; ceux qui voudront s'en inſtruire plus à fond, pourront conſulter les divers auteurs qui ont écrit ſur ce ſujet. Parmi ces auteurs il en eſt qui ne ſont pas toûjours exacts, entr'autres Wallis, que ſa partialité en faveur des Anglois, doit faire lire avec précaution, *voy.* ALGEBRE. Mais nous croyons qu'on trouvera tout ce qu'on peut deſirer ſur ce ſujet dans l'*hiſtoire des Mathématiques* que prépare M. de Montucla, de l'académie royale des Sciences & des Belles-Lettres de Pruſſe, déjà connu par ſon *hiſtoire de la quadrature du cercle*, publiée en 1754, & que nous avons citée au *mot* DUPLICATION.

L'hiſtoire abrégée que nous venons de donner eſt plus que ſuffiſante dans un ouvrage tel que le nôtre, où nous devons principalement nous attacher à faire connoître les inventeurs, non les inventeurs en détail à qui la *Géométrie* doit quelques propoſitions particulieres & iſolées, mais les eſprits vraiment créateurs, les inventeurs en grand qui ont ouvert des routes, perfectionné l'inſtrument des découvertes, & imaginé des méthodes. Au reſte en finiſſant cette hiſtoire, nous ne pouvons nous diſpenſer de remarquer à l'honneur de notre nation, que ſi la *Géométrie* nouvelle eſt principalement dûe aux Anglois & aux Allemands, c'eſt aux François qu'on eſt redevable des deux grandes idées qui ont conduit à la trouver. On doit à Deſcartes l'application de l'Algebre à la *Géométrie*, ſur laquelle le calcul différentiel eſt fondé ; & à Fermat, la premiere application du calcul aux quantités différentielles, pour trouver les tangentes : la *Géométrie* nouvelle n'eſt que cette derniere méthode généraliſée. Si on ajoûte à cela ce que les François actuellement vivans ont fait en *Géométrie*, on conviendra peut-être que cette ſcience ne doit pas moins à notre nation qu'aux autres.

Objet de la Géométrie. Nous prierons d'abord le lecteur de ſe rappeller ce que nous avons dit ſur ce ſujet dans le *Diſcours prélimin.* Nous commençons par conſidérer les corps avec toutes leurs propriétés ſenſibles ; nous faiſons enſuite peu-à-peu & par l'eſprit la ſéparation & l'abſtraction de ces différentes propriétés ; & nous en venons à conſidérer les corps comme des portions d'étendue pénétrables, diviſibles, & figurées. Ainſi le corps géométrique n'eſt proprement qu'une portion d'étendue terminée en tout ſens. Nous conſidérons d'abord & comme d'une vûe générale, cette portion d'étendue quant à ſes trois dimenſions ; mais enſuite, pour en déterminer plus facilement les propriétés, nous y conſidérons d'abord une ſeule dimenſion, c'eſt à-dire la longueur, puis deux dimenſions, c'eſt-à-dire la ſurface, enfin les trois dimenſions enſemble, c'eſt-à-dire la ſolidité : ainſi les propriétés des lignes, celles des ſurfaces & celles des ſolides ſont l'objet & la diviſion naturelle de la *Géométrie.*

C'eſt par une ſimple abſtraction de l'eſprit, qu'on conſidere les lignes comme ſans largeur, & les ſurfaces comme ſans profondeur : la *Géométrie* enviſage donc les corps dans un état d'abſtraction où ils ne ſont pas réellement ; les vérités qu'elle découvre & qu'elle démontre ſur les corps, ſont donc des vérités de pure abſtraction, des vérités hypothétiques ; mais ces vérités n'en ſont pas moins utiles. Dans la nature, par exemple, il n'y a point de cercle parfait ; mais plus un cercle approchera de l'être, plus il approchera d'avoir exactement & rigoureuſement les propriétés du cercle parfait que la *Géométrie* démontre ; & il peut en approcher aſſez exactement pour avoir toutes ces propriétés, ſinon en rigueur, au moins à un degré ſuffiſant pour notre uſage.

On connoît en *Géométrie* pluſieurs courbes qui s'approchent continuellement d'une ligne droite ſans jamais la rencontrer, mais qui étant tracées ſur le papier, ſe confondent ſenſiblement avec cette ligne droite au bout d'un aſſez petit eſpace, *voyez* ASYMPTOTE ; il en eſt de même des vérités géométriques. Elles ſont en quelque maniere la limite, &, ſi on peut parler ainſi, l'*aſymptote* des vérités phyſiques, le terme dont celles-ci peuvent approcher auſſi près qu'on veut, ſans jamais y arriver exactement. Mais ſi les théoremes mathématiques n'ont pas exactement lieu dans la nature, ces théoremes ſervent du-moins à trouver avec une préciſion ſuffiſante pour la pratique, la diſtance inacceſſible d'un lieu à un autre, la meſure d'une ſurface donnée, le toiſé d'un ſolide ; à calculer le mouvement & la diſtance des aſtres ; à prédire les phénomenes céleſtes. Pour démontrer des vérités en toute rigueur, lorſqu'il eſt queſtion de la figure des corps, on eſt obligé de conſidérer ces corps dans un état de perfection abſtraite qu'ils n'ont pas réellelement : en effet, ſi on ne s'aſſujettit pas, par exemple, à regarder le cercle comme partait, il faudra autant de théoremes différens ſur le cercle, qu'on imaginera de figures différentes plus ou moins approchantes du cercle parfait ; & ces figures elles-mêmes pourront être encore abſolument hypothétiques & n'avoir point de modele exiſtant dans la nature. Les lignes qu'on conſidere en *Géométrie*, ne ſont ni parfaitement droites ni parfaitement courbes, les ſurfaces ne ſont ni parfaitement planes ni parfaitement curvilignes : mais plus elles approcheront de l'être, plus elles approcheront d'avoir les propriétés qu'on démontre des lignes exactement droites ou courbes, des ſurfaces exactement planes ou curvilignes. Ces réflexions ſuffiront, ce me ſemble, pour répondre à deux eſpeces de cenſeurs de la *Géométrie* : les uns, ce ſont les Sceptiques, accuſent les théoremes mathématiques de fauſſeté, comme ſuppoſant ce qui n'exiſte pas réellement, des lignes ſans largeur, des ſurfaces ſans profondeur ; les autres, ce ſont les phyſiciens ignorans en Mathématique, regardent les vérités de *Géométrie* comme fondées ſur des hypothèſes inutiles, & comme des jeux d'eſprit qui n'ont point d'application.

Diviſion de la Géométrie. On peut diviſer la *Géométrie* de différentes manieres : 1°. En élémentaire & en tranſcendante. La *Géométrie* élémentaire ne conſidere que les propriétés des lignes droites, des lignes circulaires, des figures & des ſolides les plus ſimples, c'eſt-à-dire des figures rectilignes ou circulaires, & des ſolides terminés par ces figures. Le cercle eſt la ſeule figure curviligne dont on parle dans les élémens de *Géométrie* ; la ſimplicité de ſa deſcription, la facilité avec laquelle les propriétés du cercle s'en déduiſent, & la néceſſité de ſe ſervir du cercle pour différentes opérations très-ſimples, comme pour élever une perpendiculaire, pour meſurer un angle, *&c.* toutes ces raiſons ont déterminé à faire entrer le cercle & le cercle ſeul dans les élémens de *Géométrie.* Cependant quelques courbes, comme la parabole, ont une équation plus ſimple que celle du cercle; d'autres, comme l'hyperbole équilatere, ont une équation auſſi ſimple, *V.* EQUATION & COURBE : mais leur deſcription eſt beaucoup moins facile que celle du cercle, & leurs propriétés moins aiſées à déduire. On peut rapporter auſſi à la *Géométrie* élémentaire la ſolution des problèmes du ſecond degré par la ligne droite & par le cercle. *Voyez* CONSTRUCTION, COURBE, & ÉQUATION.

La *Géométrie* tranſcendante eſt proprement celle qui a pour objet toutes les courbes différentes du cercle, comme les ſections coniques & les courbes d'un genre plus élevé. *Voyez* COURBE.

Cette *Géométrie* s'occupe auſſi de la ſolution des problèmes du troiſieme & du quatrieme degré & des degrés ſupérieurs. Les premiers ſe réſolvent, comme l'on ſait, par le moyen de deux ſections coniques, ou plus ſimplement & en général par le moyen d'un cercle & d'une parabole; les autres ſe réſolvent par des lignes du troiſieme ordre & au-delà. *V.* COURBE, *& les art. déjà cités.* La partie de la *Géométrie* tranſcendante qui applique le calcul différentiel & intégral à la recherche des propriétés des courbes, eſt celle qu'on appelle plus proprement *Géométrie tranſcendante*, & qu'on pourroit nommer avec quelques auteurs modernes, *Géométrie ſublime*, pour la diſtinguer non-ſeulement de la *Géométrie* élémentaire, mais de la *Géométrie* des courbes qui n'employe pas les calculs différentiel & intégral, & qui ſe borne ou à la ſynthèſe des anciens, ou à la ſimple application de l'analyſe ordinaire. Par-là on auroit trois diviſions de la *Géométrie*; *Géométrie élémentaire* ou des lignes droites & du cercle; *Géométrie tranſcendante* ou des courbes; & *Géométrie ſublime* ou des nouveaux calculs.

2°. On diviſe auſſi la *Géométrie* en ancienne & moderne. On entend par *Géométrie ancienne*, ou celle qui n'employe point le calcul analytique, ou celle qui employe le calcul analytique ordinaire, ſans ſe ſervir des calculs différentiel & intégral; & par *Géométrie moderne*, on entend ou celle qui employe l'analyſe de Deſcartes dans la recherche des propriétés des courbes, ou celle qui ſe ſert des nouveaux calculs. Ainſi la *Géométrie*, entant qu'elle ſe borne à l'analyſe ſeule de Deſcartes, eſt ancienne ou moderne, ſuivant les rapports ſous leſquels on la conſidere; moderne par rapport à celle d'Apollonius & d'Archimede, qui n'employoient point le calcul; ancienne, par rapport à la *Géométrie* que nous avons nommée *ſublime*, que Leibnitz & Newton nous ont appriſe, & que leurs ſucceſſeurs ont perfectionnée.

Des élémens de Géométrie. On a donné au *mot* ÉLÉMENS DES SCIENCES, des principes qui s'appliquent naturellement aux élémens de *Géométrie* : on y a même traité des queſtions qui ont un rapport particulier à ces élémens; par exemple, ſi on doit ſuivre dans les élémens d'une ſcience l'ordre des inventeurs; ſi on y doit préférer la facilité à la rigueur exacte, *&c.* c'eſt pourquoi nous renvoyons à l'article ÉLÉMENS. Nous obſervons ſeulement que dans la liſte d'élémens de *Géométrie* donnée par M. de la Chapelle, on a oublié ceux de M. Camus, de l'académie des Sciences, compoſés pour l'uſage des ingénieurs, & qui méritent qu'on en faſſe une mention honorable; ainſi que la *Géométrie de l'officier*, de M. le Blond, un de nos collegues, & les *élémens de Géométrie* du même auteur. Ajoûtons ici quelques réflexions qui pourront n'être pas inutiles, ſur la maniere de traites les *élémens de Géométrie.*

Nous obſerverons d'abord, & ceci eſt une remarque peu importante, mais utile, que la diviſion ordinaire de la *Géométrie* élémentaire en Longimétrie, Planimétrie, & Stéreométrie, n'eſt point exacte, à parler à la rigueur, puiſqu'on y meſure non-ſeulement des lignes droites, des plans, & des ſolides, mais auſſi des lignes circulaires & des ſurfaces ſphériques : mais nous ne pouvons qu'approuver la diviſion naturelle de la *Géométrie* élémentaire en *géométrie* des lignes droites & des lignes circulaires, *géométrie* des ſurfaces, *géométrie* des ſolides.

On peut voir au *mot* COURBE, ce que nous penſons ſur la meilleure définition poſſible de la ligne droite & de la ligne courbe. Quoique la ligne droite ſoit plus ſimple que la circulaire, cependant il eſt à propos de traiter de l'une & de l'autre, enſemble & non ſéparément, dans des élémens de *Géométrie*; parce que les propriétés de la ligne circulaire ſont d'une utilité infinie pour démontrer d'une maniere ſimple & facile ce qui regarde les lignes droites comparées entr'elles quant à leur poſition. La meſure d'un angle eſt un arc de cercle décrit du ſommet de l'angle comme rayon. On a vû au *mot* DEGRÉ, *pp. 761 & 762 du IV. vol.* pourquoi le cercle eſt la meſure naturelle des angles. Cela vient de l'uniformité des parties & de la courbure du cercle; & quand on dit que la meſure d'un angle eſt un arc de cercle décrit du ſommet, cela ſignifie ſeulement que ſi deux angles ſont égaux, les arcs décrits de leur ſommet & du même rayon ſeront égaux : de même, quand on dit qu'un angle eſt double d'un autre, cela ſignifie ſeulement que l'arc décrit du ſommet de l'un eſt double de l'arc décrit du ſommet de l'autre : car l'angle n'étant, ſuivant ſa définition, qu'une ouverture ſimple, & non pas une étendue, on ne peut pas dire proprement & abſtraction faite de toute conſidération d'étendue, qu'un angle ſoit double d'un autre; parce que cela ne ſe peut dire que d'une quantité comparée à une autre quantité homogene, & que l'ouverture de deux lignes n'ayant point de parties, n'eſt pas proprement une quantité. Quand on dit de même qu'un angle à la circonférence du cercle a pour meſure la moitié de l'arc compris entre ſes côtés, cela ſignifie que cet angle eſt égal à un angle dont le ſommet ſeroit au centre, & qui renfermeroit la moitié de cet arc; & ainſi du reſte.

Ces petites obſervations ne ſeront pas inutiles pour donner aux commençans des notions diſtinctes ſur la meſure des angles, & pour leur faire ſentir, ainſi que nous l'avons dit au *mot* ÉLÉMENS, quel eſt le véritable ſens qu'on doit donner à certaines façons de parler abrégées dont on ſe ſert dans chaque ſcience, & que les inventeurs ont imaginées pour éviter les circonlocutions.

La propoſition très-ſimple ſur la meſure des angles par un arc décrit de leur ſommet, étant jointe au principe de la ſuperpoſition, peut ſervir, ſi je ne me trompe, à démontrer toutes les propoſitions qui ont rapport à la *Géométrie* élémentaire des lignes. Le principe de la ſuperpoſition n'eſt point, comme le diſent quelques géometres modernes, un principe méchanique & groſſier; c'eſt un principe rigoureux, clair, ſimple, & tiré de la vraie nature de la choſe. Quand on veut démontrer, par exemple, que deux triangles qui ont des baſes égales & les angles à la baſe égaux, ſont égaux en tout, on employe le principe de ſuperpoſition avec ſuccès : de l'égalité ſuppoſée des baſes & des angles, on conclut avec raiſon que ces baſes & ces angles appliqués les uns ſur les autres, coïncideront;

enſuite de la coïncidence de ces parties, on conclut évidemment & par une conſéquence néceſſaire, la coïncidence du reſte, & par conſéquent l'égalité & la ſimilitude parfaite des deux triangles : ainſi le principe de la ſuperpoſition ne conſiſte pas à appliquer groſſierement une figure ſur une autre, pour en conclure l'égalité des deux, comme un ouvrier applique ſon pié ſur une longueur pour la meſurer : mais ce principe conſiſte à imaginer une figure tranſportée ſur une autre, & à conclure, 1°. de l'égalité ſuppoſée des parties données, la coïncidence de ces parties ; 2°. de cette coïncidence, la coïncidence du reſte, & par conſéquent l'égalité totale & la ſimilitude parfaite des deux figures. On peut, par la même raiſon, employer le principe de la ſuperpoſition à prouver que deux figures ne ſont pas les mêmes. Au reſte, par ſuperpoſition j'entens ici non-ſeulement l'application d'une figure ſur une autre, mais celle d'une partie, d'une figure ſur une autre partie de la même figure, à deſſein de les comparer entre elles ; & cette derniere maniere d'employer le principe de la ſuperpoſition, eſt d'un uſage infini & très-ſimple dans les élémens de *Géométrie*. *Voyez* Congruence.

Après avoir traité de la *géométrie* des lignes conſidérées par rapport à leur poſition, je crois qu'on doit traiter de la *géométrie* des lignes conſidérées quant au rapport qu'elles peuvent avoir entr'elles. Elle eſt toute fondée ſur ce théorème qu'une ligne parallele à la baſe d'un triangle en coupe les côtés proportionnellement. Pour cela il ſuffit de montrer que ſi cette parallele paſſe par le point de milieu d'un des côtés, elle paſſera par le point de milieu de l'autre ; car on fera voir enſuite aiſément que les parties coupées ſont toûjours proportionnelles, quand la partie coupée ſera commenſurable à la ligne entiere ; & quand elle ne le ſera pas, on démontrera la même propoſition par la réduction à l'abſurde, en faiſant voir que le rapport ne peut être ni plus grand, ni plus petit, & qu'ainſi il eſt égal. Nous diſons *par la réduction à l'abſurde*, car on ne peut démontrer que de cette maniere, & non d'une maniere directe, la plûpart des propoſitions qui regardent les incommenſurables. L'idée de l'infini entre au-moins implicitement dans la notion de ces ſortes de quantités ; & comme nous n'avons qu'une idée négative de l'infini, c'eſt-à-dire que nous ne le concevons que par la négation du fini, on ne peut démontrer directement & *à priori* tout ce qui concerne l'infini mathématique. *Voyez* Démonstration, Infini, & Incommensurable. Nous ne faiſons qu'indiquer ce genre de démonſtration ; mais il y en a tant d'exemples dans les ouvrages de *Géométrie*, que les mathématiciens tant ſoit-peu exercés nous comprendront aiſément. Pour éviter la difficulté des incommenſurables, on démontre ordinairement la propoſition dont il s'agit, en ſuppoſant que deux triangles de même hauteur ſont entr'eux comme leurs baſes. Mais cette derniere propoſition elle-même, pour être démontrée en rigueur, ſuppoſe qu'on ait parlé des incommenſurables. D'ailleurs elle ſuppoſe la meſure des triangles, & par conſéquent la *géométrie* des ſurfaces, qui eſt d'un ordre ſupérieur à la *géométrie* des lignes. C'eſt donc s'écarter de la généalogie naturelle des idées, que de s'y prendre ainſi. On dira peut-être que la conſidération des incommenſurables rendra la *géométrie* élémentaire plus difficile, cela ſe peut ; mais ils entrent néceſſairement dans cette *géométrie* ; il faut y venir tôt ou tard, & le plûtôt eſt le mieux, d'autant plus que la théorie des proportions des lignes amene naturellement cette conſidération : Toute la théorie des incommenſurables ne demande qu'une ſeule propoſition, qui concerne les limites des quantités ; ſavoir que les grandeurs qui ſont la limite d'une même grandeur, ou les grandeurs qui ont une même limite, ſont égales entr'elles (*voyez* Limite, Exhaustion, & Différentiel) ; principe d'un uſage univerſel en *Géométrie*, & qui par conſéquent doit entrer dans les élémens de cette ſcience, & s'y trouver preſque dès l'entrée.

La *géométrie* des ſurfaces ſe réduit à leur meſure ; & cette meſure eſt fondée ſur un ſeul principe, celui de la meſure du parallélogramme rectangle qu'on ſait être le produit de ſa hauteur par ſa baſe. Nous avons expliqué à la fin du *mot* Equation ce que cela ſignifie, & la maniere dont cette propoſition doit être énoncée dans des élémens, pour ne laiſſer dans l'eſprit aucun nuage. De la meſure du parallélogramme rectangle ſe tire celle des autres parallélogrammes, celle des triangles qui en ſont la moitié, comme le principe de la ſuperpoſition peut le faire voir ; enfin celle de toutes les figures planes rectilignes, qui peuvent être regardées comme compoſées de triangles. A l'égard de la meſure du cercle, le principe des limites ou d'exhauſtion ſervira à la trouver. Il ſuffira pour cela de faire voir que le produit de la circonférence par la moitié du rayon eſt la limite de l'aire des ploygones inſcrits & circonſcrits ; & comme l'aire du cercle eſt auſſi évidemment cette limite, il s'enſuit que l'aire du cercle eſt le produit de la circonférence par la moitié du rayon, ou du rayon par la moitié de la circonférence. *Voyez* Cercle & Quadrature.

On peut rapprocher la théorie de la proportion des lignes de la théorie des ſurfaces par ce théorème, que quand quatre lignes ſont proportionnelles, le produit des extrèmes eſt égal au produit des moyennes ; théorème qu'on peut démontrer par la *Géométrie* ſans aucun calcul algébrique ; car le calcul algébrique ne facilite en rien les élémens de *Géométrie*, & par conſéquent ne doit pas y entrer. En rapprochant la théorie des proportions de celle des ſurfaces, on peut faire voir comment ces deux théories priſes ſéparément s'accordent à démontrer différentes propoſitions, par exemple, celle du quarré de l'hypothénuſe. Ce n'eſt pas une choſe auſſi inutile qu'on pourroit le penſer, de démontrer ainſi de différentes manieres dans des élémens de *Géométrie* certaines propoſitions principales ; par ce moyen l'eſprit s'étend & ſe fortifie en voyant de quelle maniere on fait rentrer les vérités les unes dans les autres.

Dans la *géométrie* des ſolides on ſuivra la même méthode que dans celle des ſurfaces : on réduira tout à la meſure du parallélépipede rectangle ; la ſeule difficulté ſe réduira à prouver qu'une pyramide eſt le tiers d'un parallelépipede de même baſe & de même hauteur. Pour cela on fera voir d'abord, ce qui eſt très-facile par la méthode d'exhauſtion, que les pyramides de même baſe & de même hauteur ſont égales ; enſuite, ce qui ſe peut faire de différentes manieres, comme on le peut voir dans divers élémens de *Géométrie*, on prouvera qu'une certaine pyramide déterminée eſt le tiers d'un priſme de même baſe & de même hauteur ; & il ne reſtera plus de difficulté. Par ce moyen on aura la meſure de tous les ſolides terminés par des figures planes. Il ne reſtera plus qu'à appliquer à la ſurface & à la ſolidité de la ſphere les propoſitions trouvées ſur la meſure des ſurfaces & des ſolides ; c'eſt dequoi on viendra aiſément à-bout par la méthode d'exhauſtion, comme on a fait pour la meſure du cercle ; peut-être même pourroit-on, pour plus d'ordre & de méthode, traiter de la ſurface ſphérique dans la *géométrie* des ſurfaces.

Nous ne devons pas oublier ici une obſervation importante. Le principe de la méthode d'exhauſtion eſt ſimple (*voyez* EXHAUSTION); mais ſon application peut quelquefois rendre les démonſtrations longues & compliquées. Ainſi il ne ſeroit peut-être pas mal-à-propos de ſubſtituer le principe des infiniment petits à celui d'exhauſtion, après avoir montré l'identité de ces deux principes, & avoir remarqué que le premier n'eſt qu'une façon abregée d'exprimer le ſecond; car c'eſt en effet tout ce qu'il eſt, n'y ayant dans la nature ni infinis actuels, ni infiniment petits. *Voyez* INFINI, DIFFÉRENTIEL, EXHAUSTION, & LIMITE. Par ce moyen la facilité des démonſtrations ſera plus grande, ſans que la rigueur y perde rien.

Voilà, ce me ſemble, le plan qu'on peut ſuivre en traitant de la *géométrie élémentaire*. Ce plan, & les réflexions générales que nous avons faites à la fin du *mot* ÉLÉMENS DES SCIENCES, ſuffiſent pour faire ſentir qu'il n'y a aucun géometre au-deſſus d'une pareille entrepriſe; qu'elle ne peut même être bien exécutée que par des mathématiciens du premier ordre; & qu'enfin pour faire d'excellens élémens de *Geométrie*, Deſcartes, Newton, Leibnitz, Bernoulli, *&c.* n'euſſent pas été de trop. Cependant il n'y a peut-être pas de ſcience ſur laquelle on ait tant multiplié les elémens, ſans compter ceux que l'on nous donnera ſans doute encore. Ces élémens ſont pour la plûpart l'ouvrage de mathématiciens médiocres, dont les connoiſſances en *Géométrie* ne vont pas ſouvent au-delà de leur livre, & qui par cela même ſont incapables de bien traiter cette matiere. Ajoûtons qu'il n'y a preſque pas d'auteur d'élémens de *Géométrie*, qui dans ſa préface ne diſe plus ou moins de mal de tous ceux qui l'ont précéde. Un ouvrage en ce genre, qui ſeroit au gré de tout le monde, eſt encore à faire; mais c'eſt peut-être une entrepriſe chimérique que de croire pouvoir faire au gré de tout le monde un pareil ouvrage. Tous ceux qui étudient la *Géométrie* ne l'étudient pas dans les mêmes vûes : les uns veulent ſe borner à la pratique; & pour ceux-là un bon traité de *géométrie-pratique* ſuffit, en y joignant, ſi l'on veut, quelques raiſonnemens qui éclairent les opérations juſqu'à un certain point, & qui les empêchent d'être bornées à une aveugle routine : d'autres veulent avoir une teinture de *géométrie élémentaire* ſpéculative, ſans prétendre pouſſer cette étude plus loin; pour ceux-là il n'eſt pas néceſſaire de mettre une ſi grande rigueur dans les élémens; on peut ſuppoſer comme vraies pluſieurs propoſitions, dont la vérité s'apperçoit aſſez d'elle-même, & qu'on démontre dans les élémens ordinaires. Il eſt enfin des étudians qui n'ont pas la force d'eſprit néceſſaire pour embraſſer à-la-fois les différentes branches d'une démonſtration compliquée; & il faut à ceux-là des démonſtrations plus faciles, dûſſent-elles être moins rigoureuſes. Mais pour les eſprits vraiment propres à cette ſcience, pour ceux qui ſont deſtinés à y faire des progrès, nous croyons qu'il n'y a qu'une ſeule maniere de traiter les élémens; c'eſt celle qui joindra la rigueur à la netteté, & qui en même tems mettra ſur la voie des découvertes par la maniere dont on y préſentera les démonſtrations. Pour cela il faut les montrer, autant qu'il eſt poſſible, ſous la forme de problemes à réſoudre plûtôt que de théorèmes à prouver, pourvû que d'un autre côté cette méthode ne nuiſe point à la généalogie naturelle des idées & des propoſitions, & qu'elle n'engage pas à ſuppoſer comme vrai, ce qui en rigueur géométrique a beſoin de preuve.

On a vû au *mot* AXIOME de quelle inutilité ces ſortes de principes ſont dans toutes les Sciences; il eſt donc très-à-propos de les ſupprimer dans des élémens de *Géométrie*, quoiqu'il n'y en ait preſque point où on ne les voye paroître encore. Quel beſoin a-t-on des axiomes ſur le tout & ſur la partie, pour voir que la moitié d'une ligne eſt plus petite que la ligne entiere? A l'égard des définitions, quelque néceſſaires qu'elles ſoient dans un pareil ouvrage, il nous paroît peu philoſophique & peu conforme à la marche naturelle de l'eſprit de les préſenter d'abord bruſquement & ſans une eſpece d'analyſe; de dire, par exemple, *la ſurface eſt l'extrémité d'un corps, laquelle n'a aucune profondeur*. Il vaut mieux conſidérer d'abord le corps tel qu'il eſt, & montrer comment par des abſtractions ſucceſſives on en vient à le regarder comme ſimplement étendu & figuré, & par de nouvelles abſtractions à y conſidérer ſucceſſivement la ſurface, la ligne, & le point. Ajoûtons ici qu'il ſe trouve des occaſions, ſinon dans des élémens, au-moins dans un cours complet de *Géométrie*, où certaines définitions ne peuvent être bien placées qu'après l'analyſe de leur objet. Croit-on, par exemple, qu'une ſimple définition de l'Algebre en donnera l'idée à celui qui ignore cette ſcience? Il ſeroit donc à-propos de commencer un traité d'Algebre par expliquer clairement la marche, ſuivant laquelle l'eſprit eſt parvenu ou peut parvenir à en trouver les regles; & on finiroit ainſi l'ouvrage, *la ſcience que nous venons d'enſeigner eſt ce qu'on appelle Algebre*. Il en eſt de même de l'application de l'Algebre à la *Géométrie*, & du calcul différentiel & intégral, dont on ne peut bien ſaiſir la vraie définition, qu'après en avoir compris la métaphyſique & l'uſage.

Revenons aux élémens de *Géométrie*. Un inconvénient peut-être plus grand que celui de s'écarter de la rigueur exacte que nous y recommandons, ſeroit l'entrepriſe chimérique de vouloir y chercher une rigueur imaginaire. Il faut y ſuppoſer l'étendue telle que tous les hommes la conçoivent, ſans ſe mettre en peine des difficultés des ſophiſtes ſur l'idée que nous nous en formons, comme on ſuppoſe en méchanique le mouvement, ſans répondre aux objections de Zenon d'Elée. Il faut ſuppoſer par abſtraction les ſurfaces planes & les lignes droites, ſans ſe mettre en peine d'en prouver l'exiſtence, & ne pas imiter un géometre moderne, qui par la ſeule idée d'un fil tendu croit pouvoir démontrer les propriétés de la ligne droite, indépendamment du plan, & qui ne ſe permet pas cette hypothèſe, qu'on peut imaginer une ligne droite menée d'un point à un autre ſur une ſurface plane; comme ſi l'idée d'un fil tendu, pour repréſenter une ligne droite, étoit plus ſimple & plus rigoureuſe que l'hypothèſe en queſtion; ou plûtôt comme ſi cette idée n'avoit pas l'inconvénient de repréſenter par une image phyſique groſſiere & imparfaite une hypothèſe abſtraite & mathématique.

Géométrie tranſcendante ou des courbes. Cette *Géométrie* ſuppoſe le calcul algébrique. *Voyez* ALGEBRE & MATHÉMATIQUES. On doit la commencer par la ſolution des problèmes du ſecond degré au moyen de la ligne droite & du cercle; & cette théorie peut produire beaucoup de remarques importantes & curieuſes ſur les racines poſitives & négatives, ſur la poſition des lignes qui les expriment, ſur les différentes ſolutions dont un problème eſt ſuſceptible. *Voyez au mot* EQUATION la plûpart de ces remarques, qui ne ſe trouvent pas dans les traités de *Géométrie* ordinaires; *voyez auſſi* RACINE. On paſſera de-là aux ſections coniques; la meilleure maniere & la plus courte de les traiter dans un ouvrage de *Géométrie* (qui ne ſe borne pas à cette ſeule matiere), eſt, ce me ſemble, d'employer la méthode analytique que nous avons indiquée à la fin de l'*article* CONIQUE, de les regarder comme des courbes du premier genre ou lignes du ſecond ordre, & de les diviſer en eſpeces, ſuivant ce qui en a été dit à l'article cité & au *mot* COURBE. Quand on aura trouvé l'équation la plus ſimple de la parabole, celle de l'ellipſe, & celle de l'hyperbole, on fera voir enſuite très-aiſément que ces courbes s'engendrent dans le cone, & de quelle maniere elles s'y engendrent. Cette formation des ſections coniques dans le cone ſeroit peut-être la maniere dont on devroit les enviſager d'abord, ſi on ſe bornoit à faire un traité de ces courbes; mais elles doivent entrer dans un cours de *Géométrie* ſous un point de vûe plus général. On terminera le traité des ſections coniques par la ſolution des problèmes du troiſieme & du quatrieme degré, au moyen de ces courbes; ſur quoi *voyez* CONSTRUCTION & EQUATION.

La théorie des ſections coniques doit être précédée d'un traité, qui contiendra les principes généraux de l'application de l'Algebre aux lignes courbes. *Voyez* COURBE. Ces principes généraux conſiſteront, 1°. à expliquer comment on repréſente par une équation le rapport des abſciſſes aux ordonnées; 2°. comment la réſolution de cette équation fait connoître le cours de la courbe, ſes différentes branches & ſes aſymptotes; 3°. à donner la maniere de trouver par le calcul différentiel les tangentes & les points de *maximum* & de *minimum*; 4°. à enſeigner comment on trouve l'aire des courbes par le calcul intégral : par conſéquent ce traité contiendra les regles du calcul différentiel & intégral, au-moins celles qui peuvent être utiles pour abréger un traité des ſections coniques. Quelques géometres ſe récrieront peut-être ici ſur l'emploi que nous voulons faire de ces calculs dans une matiere où l'on peut s'en paſſer; mais nous les renvoyerons à ce que nous avons dit ſur ce ſujet au *mot* ELLIPSE, *pag. 517 & 518. du tome V.* Nous y avons fait voir par des exemples combien ces calculs ſont commodes pour abréger les démonſtrations & les ſolutions, & pour réduire à quelques lignes ce qui autrement occuperoit des volumes. Nous avons d'ailleurs donné au *mot* DIFFÉRENTIEL la métaphyſique très-ſimple & très-lumineuſe des nouveaux calculs; & quand on aura bien expliqué cette métaphyſique, ainſi que celle de l'infini géométrique (*voyez* INFINI), on pourra ſe ſervir des termes d'*infiniment petit* & d'*infini*, pour abréger les expreſſions & les démonſtrations.

En traitant de l'application de l'Algebre aux courbes, on ne les repréſente guere que par l'équation entre les coordonnées paralleles; mais il eſt encore d'autres formes, quoique moins uſitées, à donner à leur équation. On peut la ſuppoſer, par exemple, entre les rayons de la courbe qui partent d'un centre, & les abſciſſes ou les ordonnées correſpondantes; comme auſſi entre ces rayons, & la tangente, le ſinus ou la ſécante de l'angle qu'ils forment avec les abſciſſes ou les ordonnées; on en voit des exemples au *mot* ELLIPSE. Toutes ces équations dans les courbes géométriques ſont finies & algébriques; mais il en eſt quelquefois qui ſe préſentent ou qui peuvent ſe préſenter ſous une forme différentielle; ce ſont celles, par exemple, dans leſquelles un des membres eſt la différentielle de l'angle formé par le rayon & l'abſciſſe, & l'autre eſt une différentielle de quelque fonction de l'abſciſſe ou du rayon, réductible à un arc de cercle. Par exemple, ſi j'avois cette équation $dz = \frac{-dx}{\sqrt{aa-xx}}$, z étant l'angle entre le rayon & l'abſciſſe, x le rayon, & a la valeur du rayon quand $z = 0$, il eſt évident que la courbe eſt géométrique. Car $\frac{-dx}{\sqrt{aa-xx}}$ eſt la différentielle d'un angle dont le coſinus eſt x, & le rayon a (*voyez* COSINUS); donc $\frac{x}{a} = \text{coſinus}\, z$; or, ſi on nomme u & y les abſciſſes & ordonnées rectangles, on aura $uu + yy = xx$; $x = \sqrt{uu+yy}$; & coſinus $z = \frac{u}{\sqrt{uu+yy}}$. C'eſt pourquoi l'équation différentielle $dz = \frac{-dx}{\sqrt{aa-xx}}$, qui paroît ne pouvoir être intégrée que par des arcs de cercle, donnera l'équation en coordonnées rectangles $\sqrt{uu+yy} = \frac{au}{\sqrt{uu+yy}}$, qui eſt l'équation d'un cercle dont les coordonnées ont leur origine à la circonférence. Il en eſt de même de pluſieurs autres cas ſemblables.

Ces ſortes d'équations méritent qu'on en faſſe une mention expreſſe dans la *Géométrie* tranſcendante, d'autant qu'elles ſont très-utiles dans la théorie des *trajectoires* ou courbes décrites par des projectiles, *voyez* TRAIECTOIRE, & par conſéquent dans la théorie des orbites des planetes, *voyez* ELLIPSE, KEPLER (*loi de*), PLANETE, & ORBITE. *Voyez aussi dans les mém. de l'acad. des Sciences pour l'année 1710. un mémoire* de M. Bernoulli ſur ce dernier ſujet.

Les ſections coniques achevées, on paſſera aux courbes d'un genre ſupérieur; on donnera d'abord la théorie des points multiples, des points d'inflexion, des points de rebrouſſement & de ſerpentement. *Voyez* POINT MULTIPLE, INFLEXION, REBROUSSEMENT, SERPENTEMENT, *&c.* Ces théories ſont fondées en partie ſur le calcul algébrique ſimple, en partie & preſque en entier ſur le calcul différentiel; ce n'eſt pas que ce dernier calcul y ſoit abſolument néceſſaire; mais, quoi qu'on en puiſſe dire, il abrege & facilite extrèmement toute cette théorie. On n'oubliera pas la théorie ſi belle & ſi ſimple des développées & des cauſtiques. *Voyez* DÉVELOPPÉE, CAUSTIQUE, OSCULATEUR, *&c.* Nous ne pouvons & nous ne faiſons qu'indiquer ici ces différens objets, dont pluſieurs ont déjà été traités dans l'Encyclopédie, & les autres le ſeront à leurs articles particuliers. *Voyez* TANGENTE, MAXIMUM, *&c.* On entrera enſuite dans le détail des courbes des différens ordres, dont on donnera les claſſes, les eſpeces, & les propriétés principales. *Voyez* COURBE. A l'égard de la quadrature & de la rectification de ces ſortes de courbes, & même de la rectification des ſections coniques, on la remettra à la *Géométrie ſublime.*

Au reſte, en traitant les courbes géométriques, on pourra s'étendre un peu plus particulierement ſur les plus connues, comme le *folium* de Deſcartes, la *conchoïde*, la *ciſſoïde*, *&c. Voyez ces mots.*

Les courbes méchaniques ſuivront les géométriques. On traitera d'abord des courbes exponentielles, qui ſont comme une eſpece moyenne entre les courbes géométriques & les méchaniques. *Voyez* EXPONENTIEL. Enſuite, après avoir donné les principes généraux de la conſtruction des courbes méchaniques, au moyen de leur équation différentielle & de la quadrature des courbes (*voyez* CONSTRUCTION), on entrera dans le détail des principales & des plus connues, de la *ſpirale*, de la *quadratrice*, de la *cycloïde*, de la *trochoïde*, *&c. Voyez ces mots.*

Telles ſont à-peu-près les matieres que doit contenir un traité de *Géométrie* tranſcendante; nous ne faiſons que les indiquer, & que marquer, pour ainſi dire, les maſſes principales : Un géometre intelligent ſaura trouver de lui-même, & à l'aide des différens articles de ce Dictionnaire, les parties qui doivent compoſer chacune de ces maſſes.

Géométrie ſublime. Après le plan que nous avons tracé pour la *Géométrie* tranſcendante, on voit que le calcul différentiel & ſes uſages y ſont preſqu'épuiſés; il ne reſte plus à la *Géométrie ſublime* que le calcul intégral, & ſon application à la quadrature & à la rectification des courbes. Ce calcul fera donc la matiere principale & preſque unique de la *Géométrie ſublime*. Sur la maniere dont on doit le traiter, *voyez* Intégral.

Nous terminerons cet article par quelques réflexions générales. On a vû au *mot* Application des obſervations ſur l'uſage de l'analyſe & de la ſynthèſe en *Géométrie*. On nous a fait ſur cet article quelques queſtions qui donneront lieu aux remarques ſuivantes.

1°. Le calcul algébrique ne doit point être appliqué aux propoſitions de la *géométrie* élémentaire, par la raiſon qu'il ne faut employer ce calcul que pour faciliter les démonſtrations, & qu'il ne paroît pas y avoir dans la *géométrie* élémentaire aucune démonſtration qui puiſſe réellement être facilitée par ce calcul. Nous exceptons néanmoins de cette regle la ſolution des problèmes du ſecond degré par le moyen de la ligne droite & du cercle (ſuppoſé qu'on veuille regarder ces problèmes comme appartenant à la *géométrie* élémentaire, & non comme le paſſage de la *géométrie* élémentaire à la tranſcendante); car le calcul algébrique ſimplifie extrèmement la ſolution des queſtions de ce genre, & il abrege même les démonſtrations. Pour s'en convaincre, il ſuffira de jetter les yeux ſur quelques-uns des problèmes du ſecond degré qui ſont réſolus dans l'*application de l'Algebre à la Géométrie* de M. Guiſnée. Après avoir mis un problème en équation, l'auteur tire de cette équation la conſtruction néceſſaire pour ſatiſfaire à l'équation trouvée; & enſuite il démontre ſynthétiquement & à la maniere des anciens, que la conſtruction qu'il a employée réſout en effet le problème. Or la plûpart de ces démonſtrations ſynthétiques ſont aſſez compliquées & fort inutiles, ſi ce n'eſt pour exercer l'eſprit; car il ſuffit de faire voir que la conſtruction ſatiſfait à la ſolution de l'équation finale, pour prouver qu'elle donne la ſolution du problème.

2°. Nous croyons qu'il eſt ridicule de démontrer par la ſynthèſe ce qui peut être traité plus ſimplement & plus facilement par l'analyſe, comme les propriétés des courbes, leurs tangentes, leurs points d'inflexion, leurs aſymptotes, leurs branches, leur rectification, & leur quadrature. Les propriétés de la ſpirale que les plus grands mathématiciens ont eu tant de peine à ſuivre dans Archimede, peuvent aujourd'hui ſe démontrer d'un trait de plume. N'y a-t-il donc pas en *Géométrie* aſſez de choſes à apprendre, aſſez de difficultés à vaincre, aſſez de découvertes à faire, pour ne pas uſer toutes les forces de ſon eſprit ſur les connoiſſances qu'on peut y acquérir à moins de frais? D'ailleurs combien de recherches géométriques auxquelles la ſeule analyſe peut atteindre? Les Anglois, grands partiſans de la ſynthèſe, ſur la foi de Newton qui la loüoit, & qui s'en ſervoit pour cacher ſa route, en employant l'analyſe pour ſe conduire lui-même; les Anglois, dis-je, ſemblent par cette raiſon n'avoir pas fait en *Géométrie*, depuis ce grand homme, tous les progrès qu'on auroit pu attendre d'eux. C'eſt à d'autres nations, aux François & aux Allemands, & ſur tout aux premiers, qu'on eſt redevable des nouvelles recherches ſur le ſyſtème du monde, ſur la figure de la terre, ſur la théorie de la lune, ſur la préceſſion des équinoxes, qui ont prodigieuſement étendu l'Aſtronomie-phyſique. Qu'on eſſaye d'employer la ſynthèſe à ces recherches, on ſentira combien elle en eſt incapable. Ce n'eſt qu'à des géometres médiocres qu'il appartient de rabaiſſer l'analyſe, comme il n'appartient de décrier un art qu'à ceux qui l'ignorent. On trouve une eſpece de conſolation à taxer d'inutilité ce qu'on ne ſait pas. Nous avons, il eſt vrai, expoſé ailleurs quelques inconvéniens de l'Algebre. *Voyez le mot* Equation, *page 850. tome V.* Si la ſynthèſe peut lever ces inconvéniens dans les cas où ils ont lieu, nous conviendrons qu'on devroit préférer la ſynthèſe à l'analyſe, du moins en ces cas-là; mais nous doutons, pour ne rien dire de plus, que la ſynthèſe ait cet avantage; & ceux qui penſeroient autrement, nous obligeroient de nous deſabuſer.

3°. Il y a cette différence en Mathématique entre l'Algebre & l'Analyſe, que l'Algebre eſt la ſcience du calcul des grandeurs en général, & que l'Analyſe eſt le moyen d'employer l'Algebre à la ſolution des problèmes. Je parle ici de l'*analyſe mathématique*; l'emploi qu'elle fait de l'Algebre pour trouver les inconnues au moyen des connues, eſt ce qui la diſtingue de l'*analyſe logique*, qui n'eſt autre choſe en général que l'art de découvrir ce qu'on ne connoît pas par le moyen de ce qu'on connoît. Les anciens géometres avoient ſans doute dans leurs recherches une eſpece d'analyſe; mais ce n'étoit proprement que l'analyſe logique. Tout algebriſte s'en ſert pour commencer le calcul; mais enſuite le ſecours de l'Algebre facilite extrèmement l'uſage & l'application de cette analyſe à la ſolution des problèmes. Ainſi, quand nous avons dit au *mot* Analyse, que l'analyſe *mathématique* enſeigne à réſoudre les problèmes, en les *réduiſant à des équations*, nous croyons avoir donné une définition très-juſte. Ces derniers mots ſont le caractere eſſentiel qui diſtingue l'analyſe mathématique de toute autre; & nous n'avons fait d'ailleurs que nous conformer en cela au langage univerſellement reçu aujourd'hui par tous les géometres algébriſtes.

4°. On peut appeller l'Algebre *géométrie ſymbolique*, à cauſe des ſymboles dont l'Algebre ſe ſert dans la ſolution des problèmes; cependant le nom de *géométrie métaphyſique* qu'on a donnée à l'Algebre (*voyez* Algebre), paroît lui être du-moins auſſi convenable; parce que le propre de la Métaphyſique eſt de généraliſer les idées, & que non ſeulement l'Algebre exprime les objets de la *Géométrie* par des caracteres généraux, mais qu'elle peut faciliter l'application de la *Géométrie* à d'autres objets. En effet on peut, par exemple, en Méchanique, repréſenter le rapport des parties du tems par le rapport des parties d'une ligne, & le mouvement d'un corps par l'équation d'une courbe, dont les abſciſſes repréſentent les tems, & les ordonnées les vîteſſes correſpondantes. La *Géométrie*, ſur-tout lorſqu'elle eſt aidée de l'Algebre, eſt donc applicable à toutes les autres parties des Mathématiques, puiſqu'en Mathématique il n'eſt jamais queſtion d'autre choſe, que de comparer des grandeurs entr'elles; & ce n'eſt pas ſans raiſon que quelques géometres philoſophes ont défini la *Géométrie* la ſcience *de la grandeur en général*, entant qu'elle eſt repréſentée ou qu'elle peut l'être par des lignes, des ſurfaces, & des ſolides.

Sur l'application de la *Géométrie* aux différentes ſciences, *voyez* Application, Méchanique, Optique, Physique, Physico-Mathématique, *&c.* (*O*)

Fin