Les théorèmes de convergence barypolygonale et leurs applications dans l'enseignement secondaire et supérieur

Par David Pouvreau[1] et Vincent Bouis[2]

Résumé
Cet article présente le concept de suite barypolygonale et expose certains résultats associés concernant la convergence d'une telle suite. Il s'agit ensuite d'examiner de quelles manières ce concept et ces résultats peuvent être utilisés sur un large spectre de niveaux d'enseignement des mathématiques, et ce dans des domaines très divers : la géométrie, l'algèbre, l'analyse, la théorie des probabilités et l'algorithmique sont toutes impliquées ici. Partant des cas les plus simples pour cheminer progressivement vers les résultats très généraux initialement exposés, cet article propose des problèmes que l'enseignant peut s'approprier à sa convenance en vue de travailler avec ses élèves ou étudiants. Quelques commentaires soulignent chaque fois les intérêts spécifiques du problème associé, le cas échéant en justifiant la manière de formuler les questions.

1. Les théorèmes de convergence barypolygonale

Les notions de barypolygone et de suite barypolygonale ont été introduites et développées récemment, dans (Pouvreau, 2016), (Pouvreau, Eupherte, 2016) et (Bouis, 2017). Nous commencerons ici par fournir de nouveau leurs définitions, avant d'énoncer les différents théorèmes qui s'y rapportent.

Soit E un espace affine réel de dimension finie quelconque. Soit $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On considère une famille ordonnée $\mathcal{F}$ de points distincts $(A_k)_{1\le k\le p}$ de E et une famille ordonnée $t = (t_k)_{1\le k\le p}$ de réels de $]0;1[$. On appelle « t–barypolygone d'ordre 2 » de $\mathcal{F}$ la famille ordonnée de points $\mathcal{B} = (B_k)_{1\le k\le p}$ dont les éléments sont définis par les conditions barycentriques :

$$\begin{cases} \forall\, k \in [\![1;p-1]\!],\ \ B_k = \mathrm{bar}\,\{(A_k\,;t_k)\,;(A_{k+1}\,;1-t_k)\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad B_p = \mathrm{bar}\,\{(A_p\,;t_p)\,;(A_1\,;1-t_p)\} \end{cases}$$

On appelle alors suite « t–barypolygonale d'ordre 2 » de $\mathcal{F}$ la suite $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de familles ordonnées de points définie par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{B}_0 = \mathcal{F} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \mathcal{B}_{n+1}\ \text{ est le } t\text{– barypolygone d'ordre 2 de }\ \mathcal{B}_n \end{cases}$$

On qualifie de *régulière* cette suite $\mathfrak{B}$ si $t_i = t_j$ pour tout $(i;j) \in [\![1;p]\!]^2$. On convient alors de noter t la valeur commune des paramètres $(t_k)_{1\le k\le p}$. On dit que $\mathfrak{B}$ est *irrégulière* dans le cas contraire.

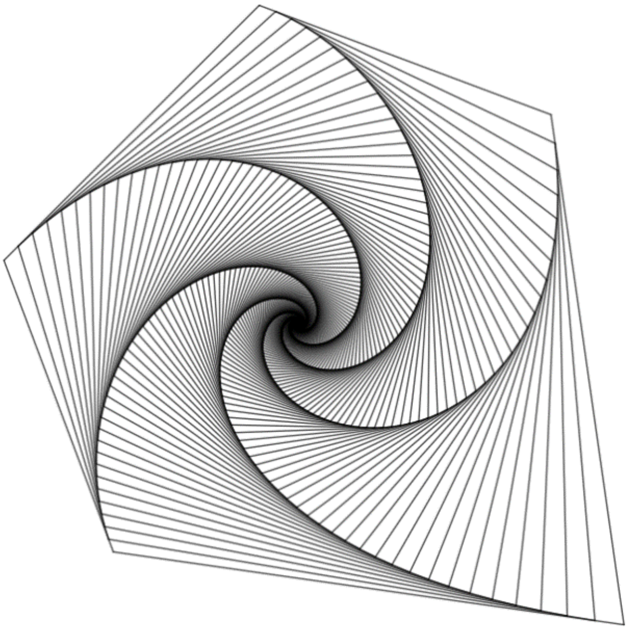
Les théorèmes établis dans les articles mentionnés concernent la convergence et la limite des suites barypolygonales d'ordre 2, quelle qu'elles soient. Il s'agit d'abord des deux théorèmes suivants :

Théorème 1
La suite $\mathfrak{B}$ converge toujours vers

$$G = \mathrm{bar}\left\{\left(A_k;\frac{1}{1-t_k}\right)\right\}_{1\le k\le p} = \mathrm{bar}\left\{\left(A_k;\prod_{\substack{1\le i\le p\\ i\ne k}}(1-t_i)\right)\right\}_{1\le k\le p}$$

[1] Professeur agrégé de mathématiques et docteur en histoire des sciences. Université de Mayotte et Institut Alexander Grothendieck (Université de Montpellier). Email : david_pouvreau@orange.fr
[2] Etudiant à l'Ecole Normale Supérieure de Paris. Email : v.bouis@laposte.net

En particulier, elle converge vers le centre de gravité de $\mathcal{F}$ si elle est régulière.



Exemple de suite barypolygonale irrégulière des sommets d'un pentagone

Théorème 2

Soit $(\alpha_k)_{1\leq k\leq p}$ une famille ordonnée de réels non nuls et de somme distincte de 0. On note $G = \mathrm{bar}\{(A_k;\alpha_k)\}_{1\leq k\leq p}$. Alors :

(i) Il n'existe une suite « barypolygonale » d'ordre 2 de $\mathcal{F}$ convergeant vers G que si tous les réels de $(\alpha_k)_{1\leq k\leq p}$ sont de même signe.

(ii) Si tous les réels de $(\alpha_k)_{1\leq k\leq p}$ sont de même signe, il existe une infinité de suites « t–barypolygonales » d'ordre 2 de $\mathcal{F}$ convergeant vers G. Ce sont les suites déterminées par :

$$\forall\ k \in [\![1;p]\!],\ \ t_k = 1 - \frac{\mu}{\alpha_k}$$

où μ désigne tout réel tel que $0 < |\mu| < \mathrm{Inf}\,\{|\alpha_k|\}_{1\leq k\leq p}$ et de même signe que les réels $(\alpha_k)_{1\leq k\leq p}$.

Cette notion de suite barypolygonale d'ordre 2 a été généralisée dans (Bouis, 2017) pour concerner non plus seulement les cas de barycentres successifs de paires de points consécutifs de la famille $\mathcal{F}$, mais les cas de groupes de $k \geq 2$ points successifs de $\mathcal{F}$ dans la situation où $p \geq 3$: on parle dans ce cas de suite barypolygonale d'ordre k. Plus précisément, on considère cette fois une famille ordonnée $t = \left(t_{i,j}\right)_{0\leq i\leq k-1\,;\,1\leq j\leq p}$ de réels de $]0;1[$ vérifiant :

$$\forall\ j \in [\![1;p]\!],\ \ \sum_{i=0}^{k-1} t_{i,j} = 1$$

On appelle alors « t-barypolygone d'ordre k » de $\mathcal{F}$ la famille ordonnée de points $\mathcal{B} = \left(B_j\right)_{1\leq j\leq p}$ dont les éléments sont définis par les conditions barycentriques (les indices étant considérés modulo p) :

$$\forall\ j \in [\![1;p]\!],\ \ B_j = \mathrm{bar}\left\{(A_{i+j}\,;t_{i,j})\,;0 \leq i \leq k-1\right\} = \mathrm{bar}\left\{(A_i\,;t_{i-j\,,j})\,;0 \leq i \leq k-1\right\}$$

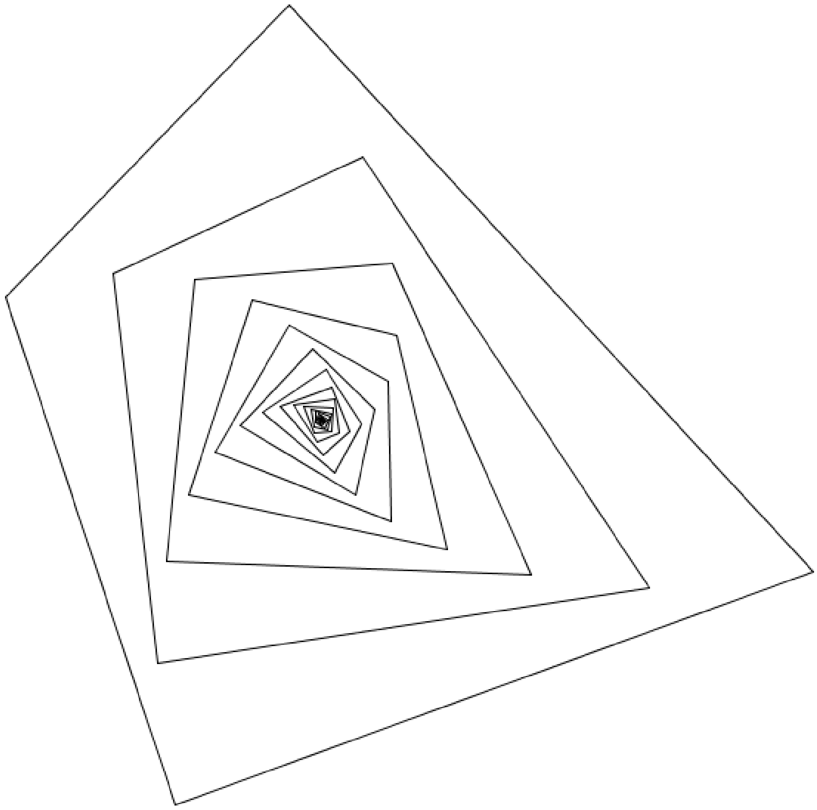
La suite « t-barypolygonale » d'ordre k de $\mathcal{F}$ est dans ces conditions la suite $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de familles ordonnées de points définie par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{B}_0 = \mathcal{F} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathcal{B}_{n+1} \text{ est le } t\text{– barypolygone d'ordre } k \text{ de } \mathcal{B}_n \end{cases}$$

Théorème 3
Il existe une partie Ω de l'ensemble des fonctions de $[\![1;p-1]\!]$ dans $[\![1;k-1]\!]$ qui est indépendante de t, et telle que la suite $\mathfrak{B}$ converge vers le point :

$$G = \mathrm{bar}\left\{\left(A_j; \sum_{f\in\Omega}\prod_{i=1}^{p-1} t_{f(i),i+j}\right)\right\}_{1\leq j\leq p}$$

Le théorème 1 apparaît comme un cas particulier du précédent : Ω est alors réduit à la fonction constante égale à 1. Il est de plus possible de trouver une caractérisation exacte de Ω dans le cas général (qui ne sera pas évoquée ici compte tenu de sa complexité et surtout de la finalité de cet article).



Exemple de suite barypolygonale d'ordre 3 des sommets d'un quadrilatère

Enfin, la richesse du sujet n'est pas épuisée par ces trois théorèmes : de nouvelles propriétés peu évidentes ont été découvertes fin 2016. Les auteurs du présent article ont en effet aussi démontré que toute suite barypolygonale $\mathfrak{B}$ d'ordre 2 d'une famille de points $\mathcal{F}$ initialise une certaine suite de suites barypolygonales d'ordre 2 appelée suite des dérivées de $\mathfrak{B}$, qui est telle que la suite des points limites de ces suites dérivées converge dans tous les cas vers le centre de gravité de $\mathcal{F}$. Les définitions et théorèmes concernés sont le sujet de deux articles qui seront publiés en 2018 dans la revue *Quadrature* (Pouvreau, Bouis, 2018). Ils ne seront donc pas évoqués ici, leur application à l'enseignement n'étant de toute façon que difficilement concevable.

2. Objectif de cet article

Cet article, qui vise à faire connaître à un public aussi large possible les théorèmes énoncés plus haut, a pour principal objectif de montrer comment ces théorèmes peuvent donner matière à des problèmes de recherche voire d'évaluation dans l'enseignement des mathématiques. La largeur du spectre de niveaux concernés est remarquable, puisqu'il s'étend du milieu de l'enseignement secondaire aux concours de recrutement des enseignants. La diversité des connaissances et des compétences mathématiques que de tels problèmes permettent de mobiliser est tout aussi remarquable, puisqu'on y verra la géométrie, l'algèbre et l'analyse côtoyer avec bonheur la théorie des probabilités et l'algorithmique.

La partie 3 montre comment, dès le milieu de l'enseignement secondaire, les cas les plus simples de suites barypolygonales d'ordre 2 peuvent être considérés avec profit : ceux des suites régulières de paramètre $1/2$ de sommets de triangles et de carrés. Dans la partie 4, ces cas, ainsi que celui des mêmes suites pour les sommets de quadrilatères quelconques, sont reconsidérés plus spécifiquement dans un contexte d'enseignement légèrement plus avancé fournissant les outils adéquats. La partie 5 montre que le cas des suites régulières de sommets de triangles peut être entièrement résolu au seuil de l'enseignement supérieur, et qu'il en va de même de certains cas de suites irrégulières de sommets de triangles. Quelques possibilités d'exploiter le sujet d'un point de vue algorithmique avec Geogebra sont aussi mentionnées. Dans la partie 6, ces cas sont reconsidérés dans la perspective du début de l'enseignement supérieur de mathématiques. Il est de plus montré que le cas des suites régulières d'une famille de points d'un plan affine de cardinal p fini quelconque peut déjà être entièrement traité à ce niveau. Des applications algorithmiques sous Python sont également envisagées. Néanmoins, ce n'est qu'en seconde voire troisième année que les connaissances sont vraiment disponibles pour aborder ce cas général des suites régulières d'ordre 2 avec une relative autonomie, puisque la maîtrise de la théorie de la réduction des matrices carrées est nécessaire à cette fin : la partie 7 propose une manière d'entreprendre son étude. La partie 8, enfin, montre comment le cas tout-à-fait général des suites barypolygonales quelconques d'ordre 2 peut être traité à un niveau d'enseignement avancé. Elle propose aussi une étude plus difficile du cas des suites barypolygonales d'ordre 3 des sommets d'un quadrilatère.

L'attention du lecteur est attirée sur le fait qu'en aucun cas les auteurs ne considèrent les problèmes proposés comme des problèmes « clefs en main » : ils ne sont conçus que comme des suggestions, que l'enseignant doit naturellement s'approprier en fonction de sa sensibilité, du niveau et de la motivation de ses élèves ou étudiants. Ils sont toutefois suffisamment élaborés pour permettre à des élèves du secondaire ou à des étudiants du supérieur de s'y attaquer, et pour rendre manifestes à l'enseignant les principaux points clefs des raisonnements permettant d'aboutir au résultat visé.

3. Applications en milieu d'enseignement secondaire

Une suite barypolygonale régulière d'ordre 2 et de paramètre $1/2$ sera appelée ici une suite « hémipolygonale ». Ce cas particulier, tel que considéré dans le cas des triangles et des carrés, est le plus simple possible et se prête à la construction de plusieurs activités de recherche dès le milieu de l'enseignement secondaire.

3.1. Suite hémipolygonale des sommets d'un triangle quelconque

<u>Énoncé</u>

Soit ABC un triangle quelconque, qu'on notera aussi T_0.
On note I_1 le milieu de $[AB]$, J_1 le milieu de $[BC]$ et K_1 le milieu de $[CA]$.

Une fois ainsi obtenu le triangle $T_1 = I_1J_1K_1$, on considère le milieu I_2 de $[I_1J_1]$, le milieu J_2 de $[J_1K_1]$ et le milieu K_2 de $[K_1I_1]$: on obtient ainsi un triangle T_2.

On s'intéresse au problème suivant : si le procédé ainsi effectué deux fois est reproduit un nombre entier naturel n de fois, que peut-on dire du n-ième triangle T_n obtenu lorsque n augmente indéfiniment ?

1) Construire sur une même figure tous les points introduits plus haut.
2) On appelle diamètre d'un triangle la plus grande distance possible entre deux points situés tous les deux à l'intérieur de ce triangle ou sur ses côtés.
   a) Démontrer que le diamètre d'un triangle est inférieur ou égal à son demi-périmètre.
   b) Question facultative : à quelle mesure de segment correspond le diamètre d'un triangle ?
3) a) Déduire de 2) que le diamètre de T_0 est inférieur ou égal au périmètre de T_1.
   b) Comparer le diamètre de T_1 et le périmètre de T_2.
   c) Justifier que le diamètre de T_1 est inférieur ou égal au quart du périmètre de T_0.
   d) Comparer le diamètre de T_2 et le périmètre de T_0.
   e) Comparer plus généralement le diamètre de T_n et le périmètre de T_0.
   f) Justifier l'affirmation : « plus on augmente n, plus le diamètre de T_n est proche de 0 ».
   g) Que peut-on dire des triangles T_n lorsqu'on augmente n indéfiniment ?
4) On note G le centre de gravité du triangle T_0.
   a) Démontrer que G est aussi le centre de gravité des triangles T_1 et T_2.
   b) Peut-on affirmer que pour tout entier naturel n, G est le centre de gravité du triangle T_n ?
   c) Préciser la réponse qui a été fournie au 3)g).

<u>Commentaires</u>

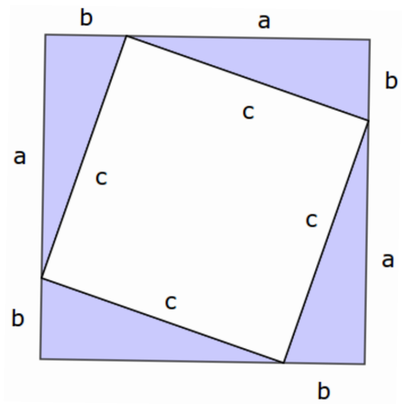
L'exercice vise l'introduction des notions de suite et de limite de suite dans un contexte géométrique, avec l'avantage que présente ce contexte pour une approche intuitive de ces notions.

Même en l'absence de connaissances exigibles concernant ces notions, elles peuvent être utilement abordées dans ce contexte. De plus, cet exercice peut être utilisé adéquatement afin de travailler les autres compétences en jeu : la compréhension et l'examen d'un problème, l'art de la conjecture et la recherche de généralisations, l'utilisation de théorèmes géométriques simples (théorème des milieux, caractérisation du centre de gravité d'un triangle), la conduite de démonstrations logiquement structurées. Outre la notion de récursivité avec laquelle il s'agit de familiariser les élèves (idéalement en accompagnement de logiciels) tout en évitant bien sûr la formalisation des raisonnements par récurrence, il faut y remarquer aussi l'utilisation du principe de comparaison comme stratégie de démonstration et de « contournement » des difficultés, ainsi que l'occasion saisie de travailler sur la formulation mathématique précise (en géométrie euclidienne) d'une notion intuitive : celle de « plus court chemin entre deux points ». Par-delà ce problème métrique, importante est ici l'introduction à des notions topologiques (intérieur, frontière, distance, diamètre, limite), sur lesquelles est finalement aussi proposée de la sorte une première réflexion présentant déjà quelques éléments de rigueur. Des alternatives à ces derniers aspects difficiles peuvent néanmoins être trouvés en minorant l'exigence de rigueur. Leur exploration sous la forme indiquée peut par contre être fructueuse dans des classes secondaires où les élèves se destinent à des études scientifiques ; elle y est en tout état de cause *a priori* pertinente. Concernant plus particulièrement la valeur du diamètre d'un triangle, le fait qu'il soit égal à la longueur de son plus grand côté peut « accessoirement » être établi, mais ce n'est en fait pas utile (et peut-être même pas souhaitable dans ce contexte) compte tenu de la perspective choisie.

En définitive, l'exercice suggéré est prétexte à un travail de production mathématique donnant matière à réflexion profonde (malgré son support théorique relativement élémentaire) sur des concepts essentiels tout en contournant un certain nombre d'obstacles tels que la maîtrise du calcul algébrique.

3.2. Preuve « barypolygonale » du théorème de Pythagore et suite hémipolygonale des sommets d'un carré

L'une des preuves les plus simples du théorème dit de Pythagore, qui a par ailleurs le grand mérite de combiner des considérations géométriques et algébriques, peut être décrite comme « barypolygonale » dans la mesure où elle constitue un raisonnement sur le premier barypolygone régulier de paramètre quelconque d'un carré de côté unité. Cette preuve classique consiste, rappelons-le, à établir que ce premier barypolygone est lui-même un carré, puis à démontrer la célèbre identité par confrontation d'un calcul de sommation d'aires et d'une identité remarquable.



Les notations étant conformes à la figure ci-dessus, l'égalité $c^2 = a^2 + b^2$ se déduit de :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 4 \times \left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2$$

On peut alors envisager d'aller plus loin en examinant le problème de la convergence de la suite barypolygonale ainsi initialisée, qui est envisageable aux niveaux considérés dans le cas particulier où cette suite est hémipolygonale. Nous réexaminerons toutefois ce problème au 3.3. dans le cas où cette restriction n'est pas imposée.

<u>Énoncé</u>

Soit $ABCD$ un carré de côté 1, qu'on notera aussi P_0.
On note I_1 le milieu de $[AB]$, J_1 le milieu de $[BC]$, K_1 le milieu de $[CD]$ et L_1 le milieu de $[DA]$.

0) Question préliminaire : Justifier que $P_1 = I_1J_1K_1L_1$ est un carré.

Une fois obtenu ce carré, on considère le milieu I_2 de $[I_1J_1]$, le milieu J_2 de $[J_1K_1]$, le milieu K_2 de $[K_1L_1]$ et le milieu L_2 de $[L_1I_1]$: on obtient ainsi un carré P_2.

On s'intéresse au problème suivant : si le procédé ainsi effectué deux fois est poursuivi un nombre entier naturel n de fois, que peut-on dire du n-ième carré P_n obtenu lorsque n augmente indéfiniment ?

1) Construire sur une même figure tous les points introduits plus haut.
2) On appelle diamètre d'un carré le diamètre de son cercle circonscrit.
   a) Déterminer le diamètre d'un carré de côté c.
   b) Justifier que le diamètre d'un carré est la plus grande distance possible entre deux points situés à l'intérieur de ce carré ou sur ses côtés.
3) Déterminer la longueur du côté du carré P_1, puis celle du côté des carrés P_2 et P_3.
4) Justifier l'affirmation suivante : « le diamètre du carré P_n est égal à $\sqrt{2} \times \left(1/\sqrt{2}\right)^n$ ».
5) Justifier l'affirmation suivante : « plus on augmente n, plus le diamètre de P_n diminue ».
6) Justifier l'affirmation suivante : « plus on augmente n, plus le diamètre de P_n est proche de 0 ».

7) Que peut-on dire des carrés P_n lorsqu'on augmente n indéfiniment ?
8) On note I le centre du cercle circonscrit au carré P_0, appelé plus simplement son centre.
   a) Démontrer que I est aussi le centre des carrés P_1 et P_2.
   b) Peut-on affirmer que pour tout entier naturel n, I est le centre du carré P_n ?
   c) Préciser la réponse qui a été fournie au 7).

Commentaires

La plupart des commentaires faits au 3.1 s'appliquent ici encore.

Mais dans le cas très particulier étudié, la définition fournie du diamètre est possible et assez naturelle. Il peut évidemment être « accessoirement » montré qu'il s'agit en fait d'une propriété déductible de la véritable définition du diamètre, mais ce n'est pas utile au but visé.

Ici aussi, le fait d'être conduit à la formulation d'une suite géométrique et à des considérations sur sa limite n'est pas nécessairement rédhibitoire à un niveau d'enseignement secondaire médian, à condition de poser les questions correspondantes de manière adéquate et d'envisager l'exercice dans une optique exploratoire destinée avant tout à réitérer l'application du théorème de Pythagore et à faire un usage intelligent d'une calculatrice ou d'un logiciel dans le cadre d'une démarche de recherche.

4. Applications spécifiques impliquant les premiers éléments de connaissance sur les suites et limites de suites

Lorsque ces éléments de connaissances sont disponibles pour l'enseignant, les deux problèmes précédemment présentés peuvent être repris avec une formulation différente utilisant explicitement les notions de suite et de limite de suite, ainsi que les résultats élémentaires sur les suites géométriques. On peut y ajouter l'examen du cas des suites hémipolygonales des sommets de quadrilatères quelconques. De plus, dans le cas du carré, il est alors possible de ne pas se limiter comme au 3.2. au cas de la suite hémipolygonale, pour envisager plus généralement l'étude de toute suite barypolygonale régulière.

4.1. Suite hémipolygonale des sommets d'un triangle quelconque

Énoncé

L'introduction au problème est identique à celle effectuée au 3.1.

1) Construire sur une même figure tous les points introduits plus haut.
2) Formuler une définition par récurrence de la suite de triangles (T_n).
3) Identique à la question 2) de l'exercice du 3.1.
4) Pour tout entier naturel n, on note p_n le périmètre du triangle T_n et d_n son diamètre.
   a) Démontrer que la suite (p_n) est géométrique. En préciser la raison et le premier terme, puis donner l'expression de p_n en fonction de n et de p_0.
   b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq d_n \leq (1/2)^{n+1} p_0$.
   c) La suite (d_n) a-t-elle une limite ? Si oui, la préciser.
5) Identique à la question 4) de l'exercice du 3.1.

Commentaires

Outre la spécificité de l'énoncé qui a été annoncée et la validité des commentaires effectués au 3.1, l'intérêt de l'exercice est évidemment d'une part l'approche géométrique de la définition d'une suite par récurrence, d'autre part l'obtention d'une limite par encadrement. Plus nettement encore ici qu'au 3.1., le fait de ne considérer les diamètres des triangles qu'au moyen d'inégalités a cet objectif qui, bien que non exigible au programme, peut déjà faire l'objet d'une réflexion, au moins dans la section S.

4.2. Suite hémipolygonale des sommets d'un quadrilatère quelconque

Énoncé

Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque, qu'on notera aussi Q_0.
On note I_1 le milieu de $[AB]$, J_1 le milieu de $[BC]$, K_1 le milieu de $[CD]$ et L_1 le milieu de $[DA]$.

0) Question préliminaire : Justifier que $Q_1 = I_1J_1K_1L_1$ est un parallélogramme.

Une fois obtenu ce parallélogramme, on considère le milieu I_2 de $[I_1J_1]$, le milieu J_2 de $[J_1K_1]$, le milieu K_2 de $[K_1L_1]$ et le milieu L_2 de $[L_1I_1]$: on obtient ainsi un nouveau parallélogramme Q_2.

On s'intéresse au problème suivant : si le procédé ainsi effectué deux fois est poursuivi un nombre entier naturel n de fois, que peut-on dire du n-ième quadrilatère Q_n obtenu lorsque n augmente indéfiniment ?

1) Construire sur une même figure tous les points introduits plus haut.
2) On appelle diamètre d'un parallélogramme $ABCD$ la plus grande distance possible entre deux points tous les deux situés à l'intérieur de ce parallélogramme ou sur ses côtés. On supposera ici que $[BD]$ est sa diagonale de plus grande longueur, notée d.
   a) On considère un point $M \in [AB]$ et un point $N \in [AD]$.
      On note $x = AM$, $y = AN$, $z = MN$, $a = AB$ et $b = AD$.
      En appliquant deux relations d'Al Kashi, déterminer $z^2 - d^2$ en fonction de a, b, x, y et $\widehat{BAD}$, puis justifier que $z \leq d$.
   b) On considère un point $M \in [AB]$ et un point $N \in [BC]$. Montrer que $MN \leq d$.
   c) Démontrer que d est le diamètre de $ABCD$.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le diamètre de Q_n. On considère les suites (u_n) et (v_n) définie par $u_n = d_{2n}$ pour tout $n \geq 1$ et $v_n = d_{2n+1}$ pour tout $n \geq 0$.
   a) Démontrer les deux égalités suivantes :
   $$v_1 = \frac{1}{2}v_0 \quad ; \quad u_2 = \frac{1}{2}u_1$$
   b) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques, en précisant leur raison et leur premier terme.
   c) La suite (d_n) a-t-elle une limite ? Si oui, la préciser.
4) On note I le point d'intersection des diagonales de Q_1.
   a) Démontrer que I est aussi le point d'intersection des diagonales de Q_2 et Q_3.
   b) Peut-on affirmer que pour tout entier naturel n, I est le point d'intersection des diagonales de Q_n ?
5) Donner la solution du problème initialement posé.

Commentaires

L'intérêt spécifique du cas de suite barypolygonale considéré tient d'une part à la mise en œuvre de relations d'Al Kashi pour la justification du diamètre d'un parallélogramme, d'autre part à l'étude de deux suites extraites. Ici encore, que cette dernière notion ne soit pas explicitement abordée dans l'enseignement secondaire n'interdit pas de saisir l'opportunité d'un exemple géométrique tel que celui traité pour l'introduire, en lui donnant un support intuitif.

4.3. Suites barypolygonales régulières des sommets d'un carré

Énoncé

Soit $ABCD$ un carré de côté 1, qu'on notera aussi P_0. Soit t un nombre quelconque fixé dans $]0; 1[$.

On définit le polygone $P_1 = I_1J_1K_1L_1$ de la manière suivante :

$$\overrightarrow{AI_1} = t\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{BJ_1} = t\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{CK_1} = t\overrightarrow{CD} \quad ; \quad \overrightarrow{DL_1} = t\overrightarrow{DA}$$

0) Question préliminaire :
   a) Construire les points précédemment définis sur une même figure, en prenant par exemple $t = 1/4$.
   b) Justifier que P_1 est un carré.

Une fois obtenu ce carré, on définit le polygone $P_2 = I_2J_2K_2L_2$ de la manière suivante :

$$\overrightarrow{I_1I_2} = t\overrightarrow{I_1J_1} \quad ; \quad \overrightarrow{J_1J_2} = t\overrightarrow{J_1K_1} \quad ; \quad \overrightarrow{K_1K_2} = t\overrightarrow{K_1L_1} \quad ; \quad \overrightarrow{L_1L_2} = t\overrightarrow{L_1I_1}$$

On obtient ainsi de nouveau un carré, que l'on pourra construire sur la figure précédente.

On s'intéresse au problème suivant : si l'on poursuit le procédé ainsi effectué deux fois un nombre entier naturel n de fois, que peut-on dire du n-ième carré P_n obtenu lorsque n augmente indéfiniment ?

1) On appelle diamètre d'un carré la plus grande distance possible entre deux points tous les deux situés à l'intérieur ou sur les côtés de ce carré. Démontrer que ce diamètre est la longueur de la diagonale du carré et l'exprimer en fonction de son côté.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note c_n la longueur du côté de P_n et d_n la valeur de son diamètre.
   a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = qc_n$, où $q = \sqrt{2t^2 - 2t + 1}$.
   b) Qu'en déduit-on pour la suite (c_n) ?
   c) Justifier que $q \in]0; 1[$.
   d) En déduire que la suite (d_n) a une limite et la préciser.
3) On note I le point d'intersection des diagonales du carré P_0, appelé plus simplement son centre.
   a) Démontrer que pour tout entier naturel n, I est le centre du carré P_n.
   b) Préciser la réponse qui a été fournie au 2)d).

Commentaires

L'intérêt principal du cas de suite barypolygonale étudié est celui de susciter un raisonnement utilisant un paramètre, qui aboutit à un énoncé dont la généralité est supérieure à tous ceux se rapportant aux cas précédents. Le raisonnement qui doit être conduit au 1) pour la détermination du diamètre est aussi très intéressant, compte tenu de la prise d'initiative nécessaire ; il faut noter à cet égard la possibilité originale d'utiliser une relation d'Al Kashi à des fins non pas de calcul, mais de comparaison de longueurs. Un intérêt secondaire est enfin l'éventuelle mise en œuvre des connaissances sur le signe d'un trinôme de degré 2, qui n'est toutefois même pas nécessaire en fait.

5. Applications pour les élèves du secondaire se destinant à un enseignement supérieur orienté vers les sciences mathématiques

Pour pouvoir envisager l'étude d'autres types de suites barypolygonales, il est nécessaire de pouvoir mener les raisonnements au moyen du calcul matriciel. C'est envisageable avec certains élèves de l'enseignement secondaire. Étant entendu que cela implique aussi d'autres connaissances déjà relativement avancées telles que l'identification du plan au plan complexe et la traduction de relations vectorielles en relations entre affixes, mais aussi l'étude de limite de suites de nombres complexes. C'est encore l'occasion d'introduire la notion de barycentre dans un contexte qui fait sens. Nous fournissons chaque fois deux versions possibles du problème considéré : la première, dite « algébriste », se focalise sur une suite de matrices en déterminant sa limite via une réduction guidée ; tandis que la seconde, dite « probabiliste », utilise pour déterminer le point limite un modèle stochastique et la formule des probabilités totales, en complément de quelques éléments de calcul matriciel. Enfin, l'enseignant trouvera ici un type de problème qui se prête particulièrement bien à l'expérimentation logicielle en montrant tout son intérêt, avec de possibles et très esthétiques simulations sous Geogebra.

5.1. Suites barypolygonales régulières des sommets d'un triangle quelconque

5.1.1. Version algébriste

Énoncé

Questions préliminaires

1) Soit $t \in]0;1[$ et soient A et B deux points distincts du plan.
Montrer qu'il existe un unique point G du plan tel que $t\overrightarrow{GA} + (1-t)\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
On appelle alors G le barycentre du système de points pondérés $\{(A;t);(B;1-t)\}$, et on note :
$$G = \mathrm{bar}\{(A;t);(B;1-t)\}$$
2) On rapporte le plan au plan complexe d'origine quelconque en notant m l'affixe d'un point M (convention respectée dans toute la suite du problème).
Démontrer que pour tous points A et B du plan et tout $t \in]0;1[$:
$$G = \mathrm{bar}\{(A;t);(B;1-t)\} \Leftrightarrow g = ta + (1-t)b$$

Problème

Soit $t \in]0;1[$ et soient A, B et C trois points distincts du plan.
On considère les trois suites de points (A_n), (B_n) et (C_n) définies par récurrence par :
$$\begin{cases} A_0 = A\,;\ B_0 = B\,;\ C_0 = C \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} A_{n+1} = \mathrm{bar}\{(A_n;t);(B_n;1-t)\} \\ B_{n+1} = \mathrm{bar}\{(B_n;t);(C_n;1-t)\} \\ C_{n+1} = \mathrm{bar}\{(C_n;t);(A_n;1-t)\} \end{cases} \end{cases}$$

Le problème posé est celui des éventuelles limites, voire de l'éventuelle limite commune, de ces suites.

1) Faire une figure des cinq premiers termes de ces suites dans un cas où $t = 2/5$, ABC étant clairement construit comme quelconque. Quelles conjectures peut-on faire ?
2) On considère la matrice :
$$M(t) = \begin{pmatrix} t & 1-t & 0 \\ 0 & t & 1-t \\ 1-t & 0 & t \end{pmatrix}$$
et la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices définie par :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$
Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = M(t)X_n$. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = \left(M(t)\right)^n X_0$.
3) On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et on considère les matrices :
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t+(1-t)j & 0 \\ 0 & 0 & t+(1-t)j^2 \end{pmatrix}$$
   a) Montrer que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.
   b) Démontrer que Q est inversible, son inverse étant

$$Q^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$$

c) Établir que $M(t)Q = QD(t)$.

d) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \big(M(t)\big)^n = Q\big(D(t)\big)^n Q^{-1}$.

4) Soit $k \in \{1; 2\}$.

a) Démontrer que

$$\left|t + (1-t)j^k\right|^2 - 1 = 2t(1-t)\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) - 1\right) < 0$$

b) La définition de la convergence d'une suite réelle se généralise aux suites complexes, le symbole $|\,.\,|$ désignant alors le module : une telle suite (z_n) converge vers un nombre complexe ℓ si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|z_n - \ell| < \varepsilon$. Déduire de a) que $\lim_{n\to+\infty}\big(t + (1-t)j^k\big)^n = 0$.

5) Démontrer avec 3)d) et 4)b) que les suites d'affixes (a_n), (b_n) et (c_n) convergent et qu'on a :

$$X = \begin{pmatrix} \lim_{n\to+\infty} a_n \\ \lim_{n\to+\infty} b_n \\ \lim_{n\to+\infty} c_n \end{pmatrix} = LX_0$$

où

$$L = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}$$

6) Utiliser le résultat précédent pour reconnaître la limite des suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Commentaires

Le problème proposé présente d'indéniables difficultés pour des élèves de l'enseignement secondaire, quand bien même ils sont avancés en mathématiques. Il a toutefois les mérites de la multiplicité des compétences à mettre en œuvre (algèbre des nombres complexes, plan complexe et géométrie vectorielle, convergence de suites numériques et calcul matriciel) et de jeter un pont entre plusieurs domaines de connaissance, montrant par là même les connexions qui peuvent s'établir entre géométrie, algèbre et analyse. Il introduit aussi à des prolongements de l'enseignement supérieur que sont, outre le travail sur les racines cubiques de l'unité et la notion de barycentre, les suites et les limites de nombres complexes ou de matrices. Une difficulté à contourner est l'extension du concept de convergence aux matrices, impossible aux niveaux d'enseignement envisagés ici : cette difficulté nécessite l'explicitation des matrices $\big(M(t)\big)^n$, puis celle des suites d'affixes, avant le passage à la limite. Mais la question 5) a pour but de suggérer le caractère naturel du passage à la limite dans la suite de matrices considérée.

5.1.2. Version probabiliste

Énoncé (dans le prolongement de celui du 5.1.1.)

L'énoncé du problème est identique à celui du 5.1.1. jusqu'à la question 2) comprise. Il se prolonge alors comme suit.

On admettra ici que chacune des suites (A_n), (B_n) et (C_n) admet une limite (qui n'est pas la même *a priori*). Le but du problème est alors de montrer sous cette hypothèse que ces limites sont en fait identiques, et de déterminer leur valeur commune. L'outil utilisé va principalement être celui du calcul des probabilités.

On imagine qu'Alice joue (seule) à un jeu. Dans une maison se trouvent trois pièces, numérotées de 1 à 3. Alice peut se rendre de la pièce 1 à la pièce 2, de la pièce 2 à la pièce 3 et de la pièce 3 à la pièce 1. Pour des raisons pratiques, on considérera dans la suite les numéros des pièces modulo 3. Le jeu d'Alice est alors le suivant : elle part d'une pièce i, et à chaque tour du jeu, elle décide, si elle est dans la j-ème pièce, d'y rester avec une probabilité t, ou d'aller dans la pièce suivante avec une probabilité $1-t$.

On va ici chercher à savoir quelle est la probabilité qu'Alice soit dans la pièce j au bout d'un certain nombre de tours (pour chaque valeur de j entre 1 et 3), et ultimement la valeur limite de cette probabilité lorsque le nombre de tours tend vers l'infini.

3) On note $P(i,j,n)$ la probabilité qu'Alice soit dans la pièce j après être partie de la pièce i et après avoir joué n tours. Montrer que pour tous i, j et n :

$$P(i,j,n+1) = (1-t)P(i+1,j,n) + tP(i,j,n)$$

$$P(i,j+1,n+1) = (1-t)P(i,j,n) + tP(i,j+1,n)$$

4) On note $Y_{i,n} = (P(i,1,n) \quad P(i,2,n) \quad P(i,3,n))$. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ Y_{i,n} = Y_{i,0}\big(M(t)\big)^n$.
5) En admettant que la suite de matrices de terme général $(M(t))^n$ converge vers une matrice L dont les coefficients sont les limites respectives des coefficients de $(M(t))^n$, montrer que pour chaque i et j entre 1 et 3, la suite de terme général $P(i,j,n)$ converge lorsque n tend vers $+\infty$. On notera $P(i,j)$ cette limite.
6) Démontrer que pour tous $i \in [\![1;3]\!]$ et $j \in [\![1;3]\!]$: $P(i+1,j) = P(i,j) = P(i,j+1)$.
7) En déduire que $P(i,1) = P(i,2) = P(i,3) = 1/3$.
8) En appliquant ce résultat lorsqu'Alice débute dans la pièce 1 (c'est-à-dire que $Y_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$), puis lorsqu'elle débute dans la pièce 2 et enfin lorsqu'elle débute dans la pièce 3, montrer que :

$$L = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

9) et 10) : identiques aux questions 5) et 6) du 5.1.1.

<u>Commentaires</u>

Bien que présentant un résultat partiel (puisqu'une propriété de convergence est admise), ce problème met en œuvre une application originale de la formule des probabilités totales, et présente un lien indéniable entre probabilités, algèbre, analyse et géométrie, en exploitant en fait, certes de manière intuitive, la dualité entre une matrice et sa transposée. Une difficulté supplémentaire est donc ici la manipulation d'objets mathématiques de natures relativement différentes.

5.2. Exemple de suite barypolygonale irrégulière des sommets d'un triangle quelconque

Au niveau considéré dans cette partie, il est inconcevable d'aborder dans sa généralité, même dans le seul cas du triangle, le problème de la convergence des suites barypolygonales irrégulières. Mais il est tout-à-fait possible d'y examiner un cas particulier, y compris dans un cas où la matrice associée n'est pas diagonalisable (ce qui implique pour le triangle l'existence de seulement deux valeurs propres de la matrice associée, l'une étant 1 et l'autre étant réelle), à condition bien sûr, là encore, de fournir adéquatement les éléments de réduction. Un tel cas de non diagonalisabilité a d'ailleurs l'intérêt de permettre d'emprunter une voie différente de celle suivie au 5.1.1., puisqu'il fournit l'opportunité de faire utiliser la formule du binôme.

Énoncé

Questions préliminaires : identiques à celles du 5.1.1.

Problème

Soient A, B et C trois points distincts du plan.
On considère les trois suites de points (A_n), (B_n) et (C_n) définies par récurrence par :

$$\begin{cases} A_0 = A\ ;\ B_0 = B\ ;\ C_0 = C \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\quad \begin{cases} A_{n+1} = \mathrm{bar}\left\{\left(A_n ; \frac{4}{5}\right) ; \left(B_n ; \frac{1}{5}\right)\right\} \\ B_{n+1} = \mathrm{bar}\left\{\left(B_n ; \frac{4}{5}\right) ; \left(C_n ; \frac{1}{5}\right)\right\} \\ C_{n+1} = \mathrm{bar}\left\{\left(C_n ; \frac{1}{5}\right) ; \left(A_n ; \frac{4}{5}\right)\right\} \end{cases} \end{cases}$$

Le problème posé est celui des éventuelles limites, voire de l'éventuelle limite commune, de ces suites.

1) Faire une figure des cinq premiers termes de ces suites, ABC étant clairement construit comme quelconque. Que peut-on conjecturer ?
2) On considère la matrice :

$$M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = MX_n$. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = M^n X_0$.

3) On considère les matrices :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -16 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 1 \\ 0 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$$

a) Justifier que Q est inversible, son inverse étant la matrice

$$Q^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{19}{15} & -\frac{17}{15} & -\frac{2}{15} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

b) Montrer que $MQ = QT$.

c) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ M^n = QT^nQ^{-1}$.

4) On considère les matrices :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \quad ; \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Justifier que $DN = ND$ et que pour tout $k \geq 2$, $N^k = 0$.
b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $T^n = D^n + nD^{n-1}N$.
c) Déterminer l'expression de la matrice M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) Démontrer que les trois suites d'affixes (a_n), (b_n) et (c_n) convergent vers un même nombre complexe g que l'on précisera en fonction de a, b et c.
6) En déduire que les trois suites de points (A_n), (B_n) et (C_n) convergent vers un même point G et montrer que ce point satisfait la relation

$$4\,\overrightarrow{GA} + 4\,\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Construire le point G.

Commentaires

Parce qu'il s'agit de l'étude d'un cas particulier (qui n'implique donc pas de paramètre) et surtout parce que cette étude n'implique pas de matrices à coefficients complexes, le problème précédent est significativement plus simple que celui présenté au 5-1-1. Précisément pour ces raisons, il a en contrepartie l'inconvénient d'être moins riche. Mais il est plus facilement accessible et ne présente pas moins l'intérêt de connecter intimement le calcul matriciel à la géométrie vectorielle et à celle du plan complexe.

5.3. Simulation de suites barypolygonales avec Géogebra

La simulation proposée a pour but de conjecturer ou de vérifier visuellement des résultats énoncés plus haut.

1) Tracer un triangle ABC.
2) Construire un curseur t, réel prenant ses valeurs dans $[0; 1]$.
3) Construire le t-barypolygone de ABC, disons $A_1B_1C_1$.
4) Construire le t-barypolygone $A_2B_2C_2$ de $A_1B_1C_1$.
5) Construire encore quelques barypolygones de la même manière.
6) Faire varier le curseur t. Que se passe-t-il ?

6. Applications en première année d'enseignement supérieur des mathématiques

Les mêmes problèmes que ceux présentés aux 5.1. et 5.2. peuvent être donnés à l'étude à des étudiants commençant leurs études supérieures en mathématiques, en laissant un peu plus d'initiative. Le cas général des suites barypolygonales régulières peut toutefois aussi être abordé à ce niveau, pourvu que l'étude soit assez guidée pour permettre de contourner l'absence de connaissances en théorie de la réduction.

6.1. Suites barypolygonales régulières des sommets d'un triangle quelconque

6.1.1. Version algébriste

Énoncé

Questions préliminaires éventuelles identiques à celles du 5.1.1.

Problème

Introduction du problème identique à celle du 5.1.1.

1) Identique à celle du 5.1.1.
2) On considère la matrice :

$$M(t) = \begin{pmatrix} t & 1-t & 0 \\ 0 & t & 1-t \\ 1-t & 0 & t \end{pmatrix}$$

et la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\;\; X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\; X_n = \big(M(t)\big)^n X_0$.

3) On considère les matrices :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t+(1-t)j & 0 \\ 0 & 0 & t+(1-t)j^2 \end{pmatrix}$$

   a) Établir que Q est inversible et préciser son inverse.
   b) Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\; \big(M(t)\big)^n = Q\big(D(t)\big)^n Q^{-1}$.

4) Soit $k \in \{1; 2\}$.
   a) Démontrer que $\left|t + (1-t)j^k\right| < 1$.
   b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(t + (1-t)j^k\big)^n$ existe et préciser cette limite.

5) et 6) identiques à celles du 5.1.1.

<u>Commentaires</u>

Quelques questions peuvent être formulées ici de manière moins guidée qu'au 5.1.1. Il est évidemment possible aussi de substituer à la donnée des éléments de réduction leur recherche guidée au moyen de l'endomorphisme associé à la matrice. La différence majeure avec le 5.1.1. est que le problème tel qu'il est posé ici peut très bien être donné en devoir en classe et non seulement en problème de recherche en temps libre. Il peut en fait l'être dès que le calcul matriciel a été abordé et même s'il l'a été seulement partiellement (comme il est souvent d'usage), c'est-à-dire avant d'avoir traité son lien avec le concept d'endomorphisme et avec les problèmes de changement de base.

6.1.2. Version probabiliste

<u>Énoncé</u>

Le même qu'en 5.1.2., avec des variations possibles conformément aux commentaires qui suivent.

<u>Commentaires</u>

Certaines questions peuvent être reformulées en termes d'endomorphismes. Cet exercice peut aussi servir d'introduction intuitive aux chaînes de Markov finies et aux questions classiques associées.

6.2. Suites barypolygonales régulières des sommets d'un polygone quelconque

6.2.1. Version algébriste

<u>Énoncé</u>

Questions préliminaires éventuelles identiques à celles du 5.1.1.

Problème

Soit $p \in \mathbb{N}\backslash\{0;1;2\}$. On considère un polygone $\mathcal{P}$ dont les sommets $(A_k)_{1\leq k\leq p}$ sont des points distincts du plan. On choisit un réel t arbitraire dans $]0;1[$.

On appelle « t–barypolygone » régulier de $\mathcal{P}$ le polygone $\mathcal{B}$ dont les sommets sont les points $(B_k)_{1\leq k\leq p}$ définis par les conditions barycentriques :

$$\begin{cases} \forall\, k \in [\![1;p-1]\!],\ \ B_k = \text{bar}\,\{(A_k\,;t)\,;(A_{k+1}\,;1-t)\} \\ \qquad\qquad\qquad\quad B_p = \text{bar}\,\{(A_p\,;t)\,;(A_1\,;1-t)\} \end{cases}$$

On appelle alors suite « t–barypolygonale » de $\mathcal{P}$ la suite $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polygones dont les sommets respectifs sont les points définis par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{B}_0 = \mathcal{P} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \mathcal{B}^{(n+1)} = \left({B_k}^{(n+1)}\right)_{1\leq k\leq p} \ \text{ est le } \ t\text{– barypolygone de } \mathcal{B}^{(n)} = \left({B_k}^{(n)}\right)_{1\leq k\leq p} \end{cases}$$

Le problème posé est celui de la convergence et de la (ou des) limite(s) éventuelle(s) des p suites de points $\left(\left({B_k}^{(n)}\right)_{1\leq k\leq p}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, donc aussi celui des éventuelles convergence et limite de la suite $\mathfrak{B}$.

Pour étudier ce problème, on rapporte le plan au plan complexe d'origine quelconque en notant m l'affixe d'un point M (convention respectée dans toute la suite du problème). On notera $\omega_p = e^{i\frac{2\pi}{p}}$.

1) Faire une figure des cinq premiers termes de ces suites dans un cas où $\mathcal{P}$ est un triangle quelconque et où $t = 2/5$. Quelles conjectures peut-on faire ?
2) Démontrer que les affixes des sommets des termes de la suite $\mathfrak{B}$ sont les solutions du système récurrent :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \begin{cases} \forall\, k \in [\![1;p-1]\!],\ \ {b_k}^{(n+1)} = t{b_k}^{(n)} + (1-t){b_{k+1}}^{(n)} \\ \qquad\qquad\qquad\quad {b_p}^{(n+1)} = t{b_p}^{(n)} + (1-t){b_1}^{(n)} \end{cases}$$
avec ${b_k}^{(0)} = a_k$ pour tout $k \in [\![1;p]\!]$.
3) Pour tout $k \in [\![1;p]\!]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la matrice colonne
$$X_{p,n} = \begin{pmatrix} {b_1}^{(n)} \\ \vdots \\ {b_p}^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(p\,;1)}\,(\mathbb{C})$$
Démontrer qu'il existe une matrice carrée $M_p(t)$ de $\mathcal{M}_p\,(\mathbb{C})$ que l'on précisera, telle que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ X_{p,n} = \left(M_p(t)\right)^n X_{p,0}$$
4) On considère la matrice $Q_p = [q_{lk}]_{(l;k)\in[\![1;p]\!]^2}$ de $\mathcal{M}_p\,(\mathbb{C})$ telle que pour tout $(l;k) \in [\![1;p]\!]^2$:
$$q_{lk} = {\omega_p}^{(l-1)(k-1)}$$
   a) Calculer $Q_p\overline{Q_p}$, où $\overline{Q_p} = [\overline{q_{lk}}]_{(l;k)\in[\![1;p]\!]^2}$.
   b) En déduire que Q_p est inversible et préciser son inverse.
5) On considère la matrice diagonale de $\mathcal{M}_p\,(\mathbb{C})$ suivante :
$$D_p(t) = \text{diag}\left(t + (1-t){\omega_p}^k\right)_{0\leq k\leq p-1}$$
   a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(M_p(t)\right)^n = Q_p\left(D_p(t)\right)^n {Q_p}^{-1}$.
   b) En déduire l'expression de $\left(M_p(t)\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6) a) Démontrer que pour tout $k \in [\![1; p-1]\!]$, $\left|t + (1-t){\omega_p}^k\right|^2 - 1 < 0$.
   b) En déduire que pour tout $k \in [\![1; p-1]\!]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(t + (1-t){\omega_p}^k\right)^n = 0$.
7) On pose :

$$L_p = \frac{1}{p}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Démontrer que les p suites $\left({b_1}^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, … , $\left({b_p}^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et que :

$$X = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} {b_1}^{(n)} \\ \vdots \\ \lim\limits_{n\to+\infty} {b_p}^{(n)} \end{pmatrix} = L_p X_{p,0}$$

   b) Justifier que $L_p = Q_p \Delta_p\, {Q_p}^{-1}$, où $\Delta_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Lier ce résultat à celui du 5)a).

8) Montrer que les p suites $\left({B_1}^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, … , $\left({B_p}^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un même point G dont on donnera une caractérisation vectorielle.

Commentaires

Ce problème présente les mêmes intérêts que le précédent, ayant en plus celui de la généralisation et ce qu'elle implique de réflexion et de maîtrise des calculs avec plusieurs paramètres. Ici encore, la nécessité de contourner la notion de limite d'une suite de matrices impose les calculs du 5)b). Le 7)b) a toutefois pour but d'attirer l'attention sur le caractère « naturel » du passage à la limite dans la relation établie au 5)a).

6.2.2. Version probabiliste

Énoncé

On conserve ici les mêmes notations qu'au 6.2.1. Tout en supposant que chacune des suites $\left({b_i}^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, pour $i \in [\![1; p]\!]$, est convergente (mais pas *a priori* avec la même limite selon les valeurs de i), le but sera de démontrer, tout en la déterminant, que ces suites ont en fait la même limite.

Alice joue (seule) à un jeu. Dans une maison se trouvent p pièces, numérotées de 1 à p. Alice peut se rendre de la pièce j à la pièce $j+1$ pour tout $j \in [\![1; p-1]\!]$, et de la pièce p à la pièce 1. Pour des raisons pratiques, on considérera dans la suite les numéros des pièces modulo p. Le jeu d'Alice est alors le suivant : elle part d'une pièce i, et à chaque tour du jeu, elle décide, si elle est dans la j-ème pièce, d'y rester avec une probabilité t, ou d'aller dans la pièce suivante avec une probabilité $1-t$.

1) On note $P(i,j,n)$ la probabilité qu'Alice soit dans la pièce j après être partie de la pièce i et après avoir joué n tours. Montrer que pour tous i, j et n :

$$P(i,j,n+1) = (1-t)P(i+1,j,n) + tP(i,j,n)$$

$$P(i,j+1,n+1) = (1-t)P(i,j,n) + tP(i,j+1,n)$$

2) On note $Y_{i,n} = (P(i,1,n) \quad \dots \quad P(i,p,n))$. Déduire de 1) que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ Y_{i,n} = Y_{i,0}\big(M(t)\big)^n$$

3) En admettant que la suite de matrices de terme général $(M(t))^n$ converge vers une matrice L dont les coefficients sont les limites respectives des coefficients de $(M(t))^n$, montrer que pour chaque i et j dans $[\![1;p]\!]$, la suite de terme général $P(i,j,n)$ converge lorsque n tend vers $+\infty$. On notera $P(i,j)$ cette limite.
4) Démontrer que pour tout $(i;j) \in [\![1;p]\!]^2$: $P(i+1,j) = P(i,j) = P(i,j+1)$.
5) En déduire que $P(i,j) = 1/p$ pour tout $(i;j) \in [\![1;p]\!]^2$.
6) En appliquant ce résultat lorsqu'Alice débute dans la pièce i (c'est-à-dire que Y_0 a toutes ses coordonnées nulles sauf la i-ème, égale à 1) pour chaque $i \in [\![1;p]\!]$, montrer que la limite L_p de la suite $\left(\left(M_p(t)\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est
$$L_p = \frac{1}{p}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

7) Identiques à la 8) du 6.2.1.

<u>Commentaires</u>

Les intérêts de ce problème sont les mêmes qu'en 6.1.2., avec cette fois-ci plus de formalisme et de réflexion sur l'algèbre linéaire et les calculs à plusieurs indéterminées.

6.3. Exemple de suite barypolygonale irrégulière des sommets d'un triangle quelconque

6.3.1. Version algébriste

<u>Énoncé</u>

Questions préliminaires : identiques à celles du 5.1.1.

Introduction du problème identique à celle du 5.2.1.

1) Identique à celle du 5.2.1.
2) On considère la matrice :
$$M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
et la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = M^n X_0$.
3) On considère les matrices $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -16 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 1 \\ 0 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$
   a) Montrer que Q est inversible et préciser son inverse.
   b) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ M^n = QT^nQ^{-1}$.
4) On considère les matrices :
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \quad ; \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $T^n = D^n + nD^{n-1}N$.
b) En déduire l'expression de la matrice M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) et 6) identiques à celles du 5.2.1.

Commentaires

Les commentaires faits au sujet du 6.1.1. s'appliquent ici à l'identique.

6.3.2. Version probabiliste

1) Identique à celle du 5.2.1.
2) On considère la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on précisera, telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = M^n X_0$.
   a) On note E_n l'enveloppe convexe (dans le plan réel) des points associés aux affixes a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1}. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_{n+1} \subset E_n$.
   b) En utilisant l'expression de l'aire d'un triangle en fonction de la base et de la hauteur, montrer qu'il existe $k \in]0; 1[$ tel que l'aire de E_{n+1} soit au plus égale à k fois l'aire de E_n.
   c) Déduire de ce qui précède que les suites (a_n), (b_n) et (c_n) admettent une limite commune, puis que la suite de matrices de terme général M^n converge.

   Pour déterminer la limite commune de (a_n), (b_n) et (c_n), on considère le jeu suivant, auquel Alice joue seule. Dans une maison se trouvent trois pièces, numérotées de 1 à 3. Alice peut se rendre de la pièce 1 à la pièce 2, de la pièce 2 à la pièce 3 et de la pièce 3 à la pièce 1. Pour des raisons pratiques, on considérera dans la suite les numéros des pièces modulo 3. Le jeu d'Alice est alors le suivant : elle part d'une pièce i, et à chaque tour du jeu, elle décide, si elle est dans la j-ème pièce, d'y rester avec une probabilité t_j, ou d'aller dans la pièce suivante avec une probabilité $1 - t_j$. On supposera ici que $t_1 = t_2 = 4/5$ et que $t_3 = 1/5$.
3) On note $P(i, j, n)$ la probabilité qu'Alice soit dans la pièce j après être partie de la pièce i et après avoir joué n tours. Montrer que pour tous i, j et n :
$$P(i, j, n + 1) = (1 - t_i)P(i + 1, j, n) + t_i P(i, j, n)$$
$$P(i, j + 1, n + 1) = \left(1 - t_j\right)P(i, j, n) + t_{j+1} P(i, j + 1, n)$$
4) On note $Y_{i,n} = (P(i, 1, n) \quad P(i, 2, n) \quad P(i, 3, n))$. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ Y_{i,n} = Y_{i,0}\big(M(t)\big)^n$.
5) En admettant que la suite de matrices de terme général $(M(t))^n$ converge vers une matrice L dont les coefficients sont les limites respectives des coefficients de $(M(t))^n$, montrer que pour chaque i et j dans $[\![1; 3]\!]$, la suite de terme général $P(i, j, n)$ converge lorsque n tend vers $+\infty$. On notera $P(i, j)$ cette limite.
6) Démontrer que pour tout $(i; j) \in [\![1; 3]\!]^2$: $P(i + 1, j) = P(i, j)$ et $P(i, 1) = P(i, 2) = 4P(i, 3)$.
7) En déduire que $P(i, 1) = P(i, 2) = 4/9$ et que $P(i, 3) = 1/9$.
8) En appliquant ce résultat lorsqu'Alice débute dans la pièce 1 (c'est-à-dire que $Y_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$), puis lorsqu'elle débute dans la pièce 2, puis lorsqu'elle débute dans la pièce 3, déterminer la limite de la suite $\left(\left(M_p(t)\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
9) En déduire que les trois suites de points (A_n), (B_n) et (C_n) convergent vers un même point G que l'on caractérisera comme barycentre des points A, B et C.

Commentaires

Les utilisations de raisonnements basiques de géométrie affine puis de théorie des probabilités noués par l'algèbre linéaire montrent de manière originale les liens entre différents domaines des mathématiques. La dualité entre une matrice et sa transposée peut être largement expliquée à partir de cet exercice (et l'on peut éventuellement discuter les liens entre leurs espaces propres), dans la mesure où elle y est exploitée de manière essentielle.

6.4. Simulation de suites barypolygonales avec Python

La simulation proposée a pour but de conjecturer ou de vérifier numériquement et visuellement des résultats énoncés plus haut, et éventuellement d'autres.

1) Choisir des nombres complexes a_0, b_0 et c_0 (éventuellement réels).
2) Définir une fonction qui, à une liste de trois éléments et un triplet t de nombres réels de $]0;1[$, renvoie sous forme d'une liste le t-barypolygone des trois points représentés par la liste.
3) Appliquer des itérées de la fonction précédente à différents triplets de points et différents t, en particulier lorsque t est un triplet de nombres égaux. Que se passe-t-il ? Quelle est la vitesse du phénomène ?
4) A l'aide du module shapely.geometry, représenter les suites barypolygonales précédentes.
5) Que se passe-t-il avec plus de 3 points ?

7. Applications en deuxième et troisième année d'enseignement supérieur des mathématiques

À partir de la seconde année d'enseignement supérieur de mathématiques, la maîtrise de la théorie et de la pratique de la réduction des endomorphismes permet d'envisager un traitement quasi autonome du problème de la convergence barypolygonale. Si l'on en reste à la seconde année, ce traitement ne peut certes que très difficilement englober le cas général des suites quelconques, examiné dans la section suivante. Mais le cas des suites régulières peut faire l'objet d'un problème vraiment adapté ; et lorsque la méthode de trigonalisation des matrices a été abordée, il est possible et judicieux de faire considérer des cas de suites irrégulières de triangles, voire de quadrilatères.

7.1. Suites barypolygonales régulières d'une famille quelconque de points

7.1.1. Version algébriste

Énoncé

Questions préliminaires éventuelles identiques à celles du 5.1.1.

Problème

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère une famille ordonnée $\mathcal{F}$ de points distincts $(A_k)_{1\leq k\leq p}$ d'un plan affine. On choisit un réel t arbitraire dans $]0;1[$.

On appelle « t–barypolygone » régulier de $\mathcal{F}$ la famille $\mathcal{B}$ de points $(B_k)_{1\leq k\leq p}$ définis par les conditions barycentriques :

$$\begin{cases} \forall\, k \in [\![1;p-1]\!], \;\; B_k = \text{bar}\,\{(A_k\,;t)\,;(A_{k+1}\,;1-t)\} \\ \qquad\qquad\qquad\quad\;\; B_p = \text{bar}\,\{(A_p\,;t)\,;(A_1\,;1-t)\} \end{cases}$$

On appelle alors suite « t–barypolygonale » de $\mathcal{F}$ la suite $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de familles ordonnées de points définie par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{B}_0 = \mathcal{F} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \mathcal{B}^{(n+1)} = \left({B_k}^{(n+1)}\right)_{1\le k\le p} \ \text{ est le } \ t\text{– barypolygone de } \mathcal{B}^{(n)} = \left({B_k}^{(n)}\right)_{1\le k\le p} \end{cases}$$

Le problème posé est celui de la convergence et de la (ou des) limite(s) éventuelle(s) des p suites de points $\left(\left({B_k}^{(n)}\right)_{1\le k\le p}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, donc aussi celui des éventuelles convergence et limite de la suite $\mathfrak{B}$.

Pour étudier ce problème, on rapporte le plan au plan complexe d'origine quelconque en notant m l'affixe d'un point M (convention respectée dans toute la suite du problème). On notera $\omega_p = e^{i\frac{2\pi}{p}}$.

1) Même question qu'au 6.2.1.
2) Pour tout $k \in [\![1;p]\!]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la matrice colonne
$$X_{p,n} = \begin{pmatrix} {b_1}^{(n)} \\ \vdots \\ {b_p}^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(p\,;1)}\,(\mathbb{C})$$
Démontrer qu'il existe une matrice carrée $M_p(t)$ de $\mathcal{M}_p\,(\mathbb{C})$ que l'on précisera, telle que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ X_{p,n} = \left(M_p(t)\right)^n X_{p,0}$$
3) Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_{(p;t)}$ de $M_p(t)$ et en déduire son spectre.
4) Justifier que $M_p(t)$ est diagonalisable. Préciser ses éléments de réduction au moyen de t et du nombre ω_p.
5) Démontrer que : $\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}\left(M_p(t)\right)\backslash\{1\},\ \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = 0.$
6) En déduire qu'au sens de n'importe quelle norme $\|.\|$ choisie sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, la suite de terme général $\left(M_p(t)\right)^n$ converge dans l'espace vectoriel normé $\left(\mathcal{M}_p(\mathbb{C})\right); \|.\|)$ vers une matrice L_p indépendante de t que l'on précisera.
7) Démontrer que la suite $\mathfrak{B}$ converge et préciser sa limite.
8) Justifier que le même résultat peut être énoncé si, au lieu de se placer dans un plan affine, on définit $\mathcal{F}$ comme une famille de points d'un espace affine de dimension quelconque.

<u>Commentaires</u>

L'énoncé est limité aux étapes clefs, mais il va de soi que des questions intermédiaires peuvent être insérées. Il existe évidemment, au niveau considéré, beaucoup de problèmes exigeant de mettre en œuvre les mêmes compétences, y compris concernant le niveau de généralité. Mais il est tout aussi clair qu'investir ces compétences dans un contexte géométrique tel que celui des suites barypolygonales présente un intérêt original : non seulement par les liens qui s'y établissent entre domaines des mathématiques, mais parce le problème posé met en jeu une véritable démarche de recherche mathématique où l'algèbre linéaire apparaît dans toute sa puissance en tant qu'outil de résolution.

7.1.2. Version probabiliste

<u>Énoncé</u>

Le même qu'en 6.2.2.

<u>Commentaires</u>

Les mêmes commentaires qu'en 6.1.2. et 6.2.2. s'appliquent ici.

7.2. Exemple de suite barypolygonale irrégulière des sommets d'un triangle quelconque

7.2.1. Version algébriste

Énoncé

Questions préliminaires : identiques à celles du 5.1.1.

Introduction du problème identique à celle du 5.1.2.

1) Identique à celle du 5.1.2.
2) On considère la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

   Démontrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on précisera, telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = M^n X_0$$

3) Montrer que M est trigonalisable dans $\mathbb{R}$ et en préciser les éléments de réduction.
4) Montrer que T étant une trigonalisée de M, la suite $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ muni de n'importe quelle norme, et préciser sa limite.
5) En déduire que les suites (A_n), (B_n) et (C_n) convergent vers un même point G dont on donnera une caractérisation vectorielle.

Commentaires

La seule nouveauté par rapport au 6.3.1., mais elle est importante, est ici encore la plus grande autonomie permise par la maîtrise de la technique de réduction matricielle et par l'acquisition de la notion de convergence dans un espace vectoriel normé.

7.2.2. Version probabiliste

Même énoncé et mêmes commentaires qu'au 6.3.2.

8. Applications dans l'enseignement supérieur avancé des mathématiques

Une maîtrise plus fine de la théorie de la réduction et, plus généralement, des concepts et techniques mathématiques impliqués dans la pleine généralisation de la théorie de la convergence barypolygonale, permettent d'aborder cette généralisation dans le cadre de problèmes de recherche voire de sujets d'examen ou de concours à des niveaux avancés d'enseignement supérieur des mathématiques. Le théorème 1 et le théorème 2 qui s'en déduit peuvent alors être démontrés. Il est même envisageable d'aborder le théorème 3 dans le cas d'une suite d'ordre 3 d'un quadrilatère : ce cas le plus simple du théorème fournit déjà assez de matière à réflexion et à prise d'initiative.

8.1. Suites barypolygonales quelconques d'une famille quelconque de points d'un espace affine de dimension finie quelconque

8.1.1. Version algébriste

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère une famille ordonnée $\mathcal{F}$ de points distincts $(A_k)_{1\leq k\leq p}$ d'un espace affine E de dimension finie. Soit $t = (t_k)_{1\leq k\leq p}$ une famille ordonnée de réels de $]0; 1[$.

On appelle *t–barypolygone* de $\mathcal{F}$ la famille ordonnée $\mathcal{B}$ de points $(B_k)_{1\le k\le p}$ définis par les conditions barycentriques :

$$\begin{cases} \forall\, k \in [\![1;p-1]\!],\ \ B_k = \text{bar}\,\{(A_k\,;t_k)\,;(A_{k+1}\,;1-t_k)\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad B_p = \text{bar}\,\{(A_p\,;t_p)\,;(A_1\,;1-t_p)\} \end{cases}$$

La *suite t–barypolygonale* de $\mathcal{F}$ est la suite $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de familles ordonnées de points définie par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{cases} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{B}^{(0)} = \mathcal{F} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \mathcal{B}^{(n+1)} = \left({B_k}^{(n+1)}\right)_{1\le k\le p}\ \ \text{est le } t\text{– barypolygone de } \mathcal{B}^{(n)} = \left({B_k}^{(n)}\right)_{1\le k\le p} \end{cases}$$

L'objectif du problème est d'étudier la convergence de la suite $\mathfrak{B}$.

<u>Partie I</u> : Cas où E est un plan affine

On suppose dans toute cette partie que E est un plan affine. On identifiera alors E au plan complexe d'origine quelconque, dans lequel on conviendra de noter systématiquement m l'affixe d'un point quelconque M.

1) Illustrer les quatre premiers termes d'une suite $\left(\frac{1}{2};\frac{4}{5};\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right)$-barypolygonale d'une famille de quatre points dans un cas où ces points sont les sommets d'un quadrilatère convexe quelconque.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_{p,n} = \left({b_k}^{(n)}\right)_{1\le k\le p}$ la matrice de $\mathcal{M}_{(p\,;1)}(\mathbb{C})$ formée des affixes des points de $\mathcal{B}^{(n)}$.
   a) Démontrer qu'il existe une matrice trigonalisable $M_p(t) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ que l'on définira précisément, telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_{p,n} = \left(M_p(t)\right)^n X_{p,0}$.
   b) Justifier que 1 est une valeur propre de multiplicité 1 de $M_p(t)$ et préciser le sous-espace propre associé E_1.
3) Soit λ une valeur propre distincte de 1 de $M_p(t)$ et soit E_λ son sous-espace propre associé.
   a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in E_\lambda \backslash \{0\}$. Justifier qu'il existe $k \in [\![1;p]\!]$ tel que $|x_k| = \text{Max}\,\{|x_i|\}_{1\le i\le p}$, avec $|x_{k+1}| < |x_k|$ (en convenant de noter éventuellement $x_{p+1} = x_1$).
   b) Établir que $\lambda x_k = t_k x_k + (1-t_k)x_{k+1}$.
   c) En déduire que $|\lambda| < 1$.
   d) Déterminer une base de E_λ.
   e) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $M_p(t)$ soit diagonalisable.
4) On note $R_p(t)$ une réduite de $M_p(t)$, étant convenu dans toute la suite de cette partie qu'une base de E_1 est choisie comme premier vecteur d'une base de réduction. On considère la matrice :

$$\Delta_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$$

   a) Justifier que si $M_p(t)$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, alors la suite $\left(\left(R_p(t)\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice Δ_p.
   b) On suppose ici que $M_p(t)$ n'est pas diagonalisable. En utilisant le théorème de réduction de Jordan, démontrer que la suite $\left(\left(R_p(t)\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge encore vers la matrice Δ_p.

c) En déduire que la suite $\left(\left(M_p(t)\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge toujours vers une matrice $L_p(t)$ de rang 1 dont toutes les lignes sont égales.

5) On note $\chi_{M_p(t)}$ le polynôme caractéristique de $M_p(t)$.
Démontrer par récurrence sur p que le quotient de $\chi_{M_p(t)}$ par le polynôme $(X-1)$ est :

$$K_{p,t}(X)=\prod_{k=2}^{p}(1-t_k)+\sum_{i=2}^{p-1}\left(\prod_{k=i+1}^{p}(1-t_k)\prod_{k=1}^{i-1}(X-t_k)\right)+\prod_{k=1}^{p-1}(X-t_k)$$

6) On suppose dans cette seule question que $M_p(t)$ est diagonalisable.
a) Préciser une matrice de passage $Q_p(t)$ vers l'une de ses diagonalisées $R_p(t)$.
b) Démontrer alors que :

$$H_p(t)Q_p(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 0 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}=Q_p(t)\Delta_p$$

où

$$H_p(t)=\left(\sum_{k=1}^{p}\left(\prod_{\substack{1\le i\le p\\ i\neq k}}u_i\right)\right)^{-1}\begin{pmatrix}\prod\limits_{k\neq 1}u_k & \prod\limits_{k\neq 2}u_k & \prod\limits_{k\neq 3}u_k & \cdots & \cdots & \prod\limits_{k\neq p}u_k\\ \prod\limits_{k\neq 1}u_k & \prod\limits_{k\neq 2}u_k & \prod\limits_{k\neq 3}u_k & \cdots & \cdots & \prod\limits_{k\neq p}u_k\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \prod\limits_{k\neq 1}u_k & \prod\limits_{k\neq 2}u_k & \prod\limits_{k\neq 3}u_k & \cdots & \cdots & \prod\limits_{k\neq p}u_k\end{pmatrix}$$

avec $u_k=1-t_k$ pour tout $k\in[\![1;p]\!]$.
c) En déduire que $L_p(t)=H_p(t)$.
d) Démontrer que la suite barypolygonale $\mathfrak{B}$ converge vers le point

$$G=\mathrm{bar}\left\{\left(A_k;\prod_{\substack{1\le i\le p\\ i\neq k}}(1-t_i)\right)\right\}_{1\le k\le p}=\mathrm{bar}\left\{\left(A_k;\frac{1}{1-t_k}\right)\right\}_{1\le k\le p}$$

7) On se place dans le cas général : ici, $M_p(t)$ n'est plus nécessairement diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
a) Justifier qu'il existe une infinité de matrices ligne non nulles $\Gamma=(\gamma_1 \ \cdots \ \gamma_p)$ telles que :

$$^t\left(M_p(t)\right)\ {}^t\Gamma={}^t\Gamma$$

b) Montrer qu'en convenant de noter $\gamma_{p+1}=\gamma_1$, l'identité précédente équivaut à :

$$\forall\, X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{(p,1)}(\mathbb{C}),\ \sum_{k=1}^{p}\gamma_k x_k=\sum_{k=1}^{p}\gamma_k\left(t_k x_k+(1-t_k)x_{k+1}\right)$$

c) Montrer que la matrice $\Gamma=(\gamma_1 \ \cdots \ \gamma_p)$ telle que $\gamma_k=1/(1-t_k)$ pour tout $k\in[\![1;p]\!]$ satisfait l'égalité du a).

d) En déduire que si $\gamma_k = 1/(1-t_k)$ pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, alors tout barycentre G d'un système quelconque de points pondérés $\{(Y_k;\gamma_k)\}_{1\leq k\leq p}$ est encore barycentre du système de points pondérés $\{(Z_k;\gamma_k)\}_{1\leq k\leq p}$, où $(Z_k)_{1\leq k\leq p}$ est le t-barypolygone de $(Y_k)_{1\leq k\leq p}$.

e) Démontrer que si $\Gamma = \big(1/(1-t_1)\ \ldots\ 1/(1-t_p)\big)$, alors : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \Gamma X_{p,0} = \Gamma X_{p,n}$.

f) Justifier qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} X_{p,n} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \vdots\\ \alpha\end{pmatrix}$, puis établir que :

$$\alpha = \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{1-t_k} b_k^{(0)}\right) \Big/ \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{1-t_k}\right)$$

g) En déduire que le théorème établi au 6)d), dit « théorème de convergence barypolygonale », s'applique toujours, et le fait que même si $M_p(t)$ n'est pas diagonalisable, on a encore $L_p(t) = H_p(t)$.

Partie II : Cas où E est un espace affine de dimension finie quelconque

Justifier que le théorème de convergence barypolygonale s'applique quelle que soit la dimension de E.

Partie III :

On se place ici dans le cas général où E est de dimension finie quelconque.

1) Soit $\alpha = (\alpha_k)_{1\leq k\leq p}$ une famille ordonnée de réels non nuls et de somme distincte de 0.
On note $G = \mathrm{bar}\{(A_k;\alpha_k)\}_{1\leq k\leq p}$.
Démontrer qu'il n'existe une suite barypolygonale de $\mathcal{F}$ convergeant vers G que si tous les réels de $(\alpha_k)_{1\leq k\leq p}$ sont de même signe et que si cette condition est satisfaite, alors il existe une infinité de suites t–barypolygonales de $\mathcal{F}$ convergeant vers G, dont on caractérisera la famille de paramètres t en fonction de la famille α.
2) Déterminer toutes les suites barypolygonales d'un triplet de points $\{A;B;C\}$ de E qui convergent vers le centre du cercle circonscrit O du triangle ABC, et toutes les suites barypolygonales de $\{A;B;C\}$ qui convergent vers l'orthocentre H de ABC.
3) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe de E. On note I le point d'intersection de ses diagonales.
   a) Caractériser I comme barycentre des sommets de $ABCD$ au moyen de coefficients aréolaires.
   b) En déduire toutes les suites barypolygonales de $\{A;B;C;D\}$ convergeant vers I.

Commentaires

La partie I du problème relative à la convergence de la suite $\left(\left(M_p(t)\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nécessite de maîtriser la théorie de la réduction de Jordan ou, tout au moins (avec une possible formulation alternative), de la trigonalisabilité en général. Dans cette question comme dans les questions 6) et 7), la distinction entre les cas de diagonalisabilité et de non diagonalisabilité, en définitive non nécessaire, a plusieurs intérêts. Elle permet d'abord de mieux observer, avec une certaine progressivité, pourquoi advient le résultat final. Elle a aussi l'intérêt didactique, avec l'utilisation de la question 5) dans la résolution de 6), de mettre en œuvre des calculs et des raisonnements d'algèbre polynomiale qui révèlent en quoi le résultat final est lié à la structure du polynôme caractéristique de $M_p(t)$. La difficulté d'aborder les cas de non diagonalisabilité par le biais des éléments propres de la matrice $M_p(t)$ est aussi rendue manifeste par le fait même des calculs nécessaires dans la question 6). Le traitement du problème est certes aussi possible par cette voie : il repose sur une réduction de Jordan et sur le fait que des valeurs propres multiples d'ordre k de $M_p(t)$ sont racines du ou des polynômes dérivés d'ordre $j \in [\![0; k-1]\!]$ du polynôme quotient $K_{p,t}(X)$ formulé au 5). Néanmoins, la question 7) montre une voie à la fois plus simple et plus élégante pour parvenir à la preuve de l'invariance des résultats par rapport au cas de diagonalisabilité.

La partie II, très courte dans son énoncé et dans sa solution, invite à une réflexion d'ensemble sur le sens des calculs menés dans la partie I, qui sont fondamentalement invariants par projection.

La partie III, enfin, conduit à l'examen du problème réciproque de celui considéré aux I et II et de quelques jolies applications géométriques, lesquelles sont bienvenues aux niveaux considérés compte tenu de l'évolution préoccupante du niveau général de connaissances en géométrie des étudiants de mathématiques. Ce problème qui mobilise une diversité appréciable de connaissances fournit en définitive un exemple à maints égards éclairant de dialogue entre algèbre, géométrie et topologie.

8.1.2. Version probabiliste

Énoncé

On reprend les notations ainsi que les quatre premières questions de la partie I de la version précédente, qui permettent de montrer que la suite $\left(\left(M_p(t)\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Pour déterminer le comportement asymptotique de la suite barypolygonale, on considérera le jeu suivant, auquel joue Alice. Dans une maison se trouvent p pièces, numérotées de 1 à p. Alice peut se rendre de la pièce j à la pièce $j+1$ pour tout $j \in [\![1; p-1]\!]$, et de la pièce p à la pièce 1. Pour des raisons pratiques, on considérera dans la suite les numéros des pièces modulo p. Le jeu est le suivant : Alice part d'une pièce i et, à chaque tour du jeu, elle décide, si elle est dans la j-ème pièce, d'y rester avec une probabilité t_j, ou d'aller dans la pièce suivante avec une probabilité $1-t_j$.

1) On note $P(i,j,n)$ la probabilité qu'Alice soit dans la pièce j après être partie de la pièce i et après avoir joué n tours. Montrer que pour tous i, j et n :
$$P(i,j,n+1) = (1-t_i)P(i+1,j,n) + t_iP(i,j,n)$$
$$P(i,j+1,n+1) = \left(1-t_j\right)P(i,j,n) + t_{j+1}P(i,j+1,n)$$
2) On note $Y_{i,n} = (P(i,1,n) \quad \ldots \quad P(i,p,n))$. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ Y_{i,n} = Y_{i,0}\left(M_p(t)\right)^n$.
3) Démontrer que pour tout $(i;j) \in [\![1;p]\!]^2$, la suite de terme général $P(i;j;n)$ converge lorsque n tend vers $+\infty$. On notera $P(i;j)$ cette limite.
4) Démontrer que pour tout $(i;j) \in [\![1;p]\!]^2$:
$$P(i+1,j) = P(i;j) \quad \text{et} \quad \left(1-t_{j+1}\right)P(i,j+1) = \left(1-t_j\right)P(i,j)$$
5) En déduire que pour tout $(i;j) \in [\![1;p]\!]^2$:
$$P(i,j) = \frac{\frac{1}{1-t_j}}{\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{1-t_i}}$$
6) En appliquant ce résultat lorsqu'Alice débute dans la pièce i (c'est-à-dire que Y_0 a toutes ses coordonnées nulles sauf la i-ème, égale à 1) pour chaque $i \in [\![1;p]\!]$, déterminer la limite L_p de la suite $\left(\left(M_p(t)\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
7) Déterminer la limite de la suite barypolygonale générale considérée.

Commentaires

Le principal intérêt de cet exercice est l'utilisation d'une partie basique de la théorie des probabilités qui permet d'arriver au résultat fourni dans la version précédente par la réduction des endomorphismes. Leur utilisation astucieuse permet de fournir un problème original mêlant à nouveau probabilités, algèbre linéaire et géométrie.

8.2. Suites barypolygonales d'ordre 3 des sommets d'un quadrilatère quelconque

Énoncé

On considère une famille $\mathcal{F}$ de quatre points distincts $(A_i)_{1\leq i\leq 4}$ d'un espace affine E de dimension finie, et une famille t de réels a_1, b_1, c_1, …, a_4, b_4, c_4 de l'intervalle $]0;1[$ tels que :

$$\forall\, j \in [\![1;4]\!],\ \ a_j + b_j + c_j = 1$$

On appelle t-barypolygone d'ordre 3 de $\mathcal{F}$ la famille ordonnée $\mathcal{B}$ de sommets de quadrilatères $\left(B_j\right)_{1\leq j\leq 4}$ définis par les conditions barycentriques suivantes, les indices étant considérés modulo 4 :

$$\forall\, j \in [\![1;4]\!],\ \ B_j = \text{bar}\left\{(A_j\,;a_j)\,;\left(A_{j+1}\,;b_j\right);\ \left(A_{j+2}\,;c_j\right)\right\}$$

On appelle alors suite barypolygonale d'ordre 3 de $\mathcal{F}$ la suite $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de sommets de quadrilatères qui est définie par récurrence par :

$$\begin{cases} \mathcal{B}^{(0)} = \mathcal{F} \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \mathcal{B}^{(n+1)} = \left({B_k}^{(n+1)}\right)_{1\leq k\leq p} \ \text{ est le } t\text{– barypolygone de } \mathcal{B}^{(n)} = \left({B_k}^{(n)}\right)_{1\leq k\leq p} \end{cases}$$

L'objectif du problème est d'étudier la convergence de la suite $\mathfrak{B}$.

1) On supposera jusqu'à mention contraire que E est un plan affine. On identifiera alors E au plan complexe d'origine quelconque, dans lequel on conviendra de noter systématiquement a l'affixe d'un point quelconque A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \left({b_k}^{(n)}\right)_{1\leq k\leq 4}$ la matrice de $\mathcal{M}_{(4\,;1)}(\mathbb{C})$ formée des affixes des points de $\mathcal{B}^{(n)}$.
   a) Démontrer qu'il existe une matrice stochastique $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ que l'on définira précisément, telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = M^n X_0$.
   b) Justifier que 1 est une valeur propre de multiplicité 1 de M et préciser le sous-espace propre associé E_1.
   c) Montrer que si λ est une valeur propre de M différente de 1, alors $|\lambda| < 1$.
   d) En utilisant une réduite de Jordan de M, démontrer que la suite de terme général M^n converge dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.
2) On cherche à présent à déterminer la limite de la suite $\mathfrak{B}$. On considère à cette fin le jeu suivant, auquel joue Alice. Dans une maison se trouvent 4 pièces, numérotées de 1 à 4. Alice peut se rendre de la pièce 1 à la pièce 2 ou à la pièce 3 (mais pas à la pièce 4), de la pièce 2 à la pièce 3 ou à la pièce 4 (mais pas à la pièce 1), de la pièce 3 à la pièce 4 ou à la pièce 1 (mais pas à la pièce 2) et de la pièce 4 à la pièce 1 ou à la pièce 2 (mais pas à la pièce 3). Pour des raisons pratiques, on considérera dans la suite les numéros des pièces modulo 4. Le jeu est le suivant : Alice part d'une pièce i et, à chaque tour du jeu, elle décide, si elle est dans la j-ème pièce, d'y rester avec une probabilité a_j, ou d'aller dans la pièce suivante avec une probabilité b_j, ou d'avancer de deux pièces avec une probabilité c_j.

a) On note $P(i,j,n)$ la probabilité qu'Alice soit dans la pièce j après être partie de la pièce i et après avoir joué n tours. Montrer que pour tous i, j et n :

$$P(i,j,n+1) = c_i P(i+2,j,n) + b_i P(i+1,j,n) + a_i P(i,j,n)$$
$$P(i,j+2,n+1) = c_j P(i,j,n) + b_{j+1} P(i,j+1,n) + a_{j+2} P(i,j+2,n)$$

b) On note $Y_{i,n} = (P(i,1,n) \quad P(i,2,n) \quad P(i,3,n) \quad P(i,4,n))$. Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ Y_{i,n} = Y_{i,0} M^n$$

c) Démontrer que pour tout $(i;j) \in [\![1;4]\!]^2$, la suite $(P(i,j,n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

d) Démontrer que la limite de cette suite ne dépend pas de i. On la notera p_j.

3) On considère dans cette question le cas des suites barypolygonales régulières d'ordre 3 de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire telles que $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, $b_1 = b_2 = b_3 = b_4$ et $c_1 = c_2 = c_3 = c_4$.

a) Démontrer que pour tout $j \in [\![1;4]\!]$, $(b_{j+2} + c_{j+2})p_{j+2} = b_{j+1}p_{j+1} + c_j p_j$.

b) En déduire que tous les nombres p_j (pour $j \in [\![1;4]\!]$) sont égaux.

c) Expliciter la limite de la suite de terme général M^n.

d) Expliciter la limite de la suite barypolygonale régulière associée.

4) On considère dans cette question le cas général.

a) Démontrer qu'on a encore : $\forall\, j \in [\![1;4]\!]$, $(b_{j+2} + c_{j+2})p_{j+2} = b_{j+1}p_{j+1} + c_j p_j$.

b) Démontrer que les nombres p_j (pour $j \in [\![1;4]\!]$) sont uniquement déterminés par ce système de quatre équations et par une autre équation à expliciter.

c) Démontrer que tout quadruplet $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ de $\mathbb{R}^4$ satisfaisant les conditions :

$$\forall\, j \in [\![1;4]\!],\ \ x_j = b_{j+1}b_{j+2} + c_{j+1}b_{j+2} + c_{j+1}c_{j+2}$$

est solution du système de quatre équations considéré au a).

d) En déduire la valeur des nombres p_j.

e) Expliciter la limite de la suite de terme général M^n.

f) Expliciter de manière barycentrique la limite de la suite barypolygonale associée en fonction des nombres p_j, puis en fonction des nombres b_j et c_j.

5) Que dire dans le cas où E n'est plus un plan affine, mais un espace affine de dimension finie quelconque supérieures ou égale à 3 ? Aurait-on pu traiter le cas où E est de dimension 1 ?

Commentaires

Ce problème est d'un niveau plus élevé que les précédents et présente des résultats d'un niveau légèrement supérieur. Il peut être utilisé dans de nombreux contextes, à partir d'un certain niveau de compétences. En effet, les notions de début de problème sont, bien que souvent mal maîtrisées, relativement classiques ; la suite présente quant à elle un contenu original guidé. Des questions d'introduction peuvent être ajoutées pour vérifier certains résultats à l'aide d'un programme, par exemple. Des généralisations très naturelles (considérer par exemple les suites barypolygonales d'ordre 3 ou 4 des sommets d'un pentagone) proposées en fin de problème peuvent servir à élever le niveau attendu.

9. Conclusion

Les théorèmes de convergence barypolygonale offrent une très riche matière à l'enseignement des mathématiques, du milieu de l'enseignement secondaire jusqu'à la fin du second cycle d'enseignement supérieur. Cette richesse tient à la multiplicité des domaines mathématiques impliqués, et à la possibilité d'utiliser les outils informatiques dans un contexte qui fait sens, aux fins de conjecture et d'illustration graphique. L'originalité majeure de la théorie des suites barypolygonales pour l'enseignement est le pont qu'elle jette chaque fois que possible au niveau d'enseignement considéré entre la géométrie, l'algèbre (des polynômes, des nombres complexes et surtout l'algèbre linéaire), l'analyse (suites numériques) et le calcul des probabilités. Des applications à l'enseignement telles que celles proposées dans cet article fournissent de la sorte l'opportunité remarquable de rendre manifeste aux élèves et étudiants l'unité dans la diversité des mathématiques.

10. Bibliographie

Bouis V., « Des probabilités aux suites barypolygonales », *Quadrature*, n° 105, 2017, pp. 30-38.

Pouvreau D., « Suites barypolygonales régulières », *Quadrature*, n° 100, 2016, pp. 16-19.

Pouvreau D., Bouis V., « Système dérivé et suite duale d'une suite barypolygonale » Parties 1 et 2, *Quadrature*, n° 108 (avril) et n° 109 (juillet), 2018.

Pouvreau D., Eupherte R., « Suites barypolygonales quelconques », *Quadrature*, n° 102, 2016, pp. 32-43.