DM et BD : la série harmonique

1. On étudie le signe de la différence de deux termes consécutifs. Puisque

$$H_{n+1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1},$$

on a

$$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} \geq 0,$$

et on en déduit que la suite (H_n) est strictement croissante.

2.
```
def harmonique(n):
s=0
for i in range(1,n+1):
    s=s+1/i
return s

>>> harmonique(5)
2.28333333333333
```

3.

n	1	5	10	100	1000	100000
H_n	1	$2,283$	$2,930$	$5,187$	$7,485$	$12,090$

4.
```
def seuil():
s=0
i=1
while s <15:
    s=s+1 / i
i=i+1
return i


>>> seuil()
1835422
```

Le premier terme à partir duquel $H_n \geq 15$ est $H_{1835422}$ Comme (H_n) est strictement croissante, si $n \geq 1835422$, alors $H_n > 15$

5. La question de la limite de (H_n) est compliquée *apriori* : si tous les termes de la suite sont de plus en plus grands, les nombres qu'on ajoute deviennent très petits au fur et à mesure. On a trouvé à partir de quel rang tous les termes dépassent 15 , mais en modifiant la valeur du seuil à 20, il faut aller au-delà du rang 272400601. Peut être qu'on peut dépasser toutes les valeurs qu'on veut, mais si c'est le cas, c'est très lent . Après deux essais en classe, une majorité de la classe pense que (H_n) diverge vers $+\infty$

6. Case 3 et 4 : Oresme affirme que la somme des inverses des nombres entiers devient aussi grande que l'on veut (sous-entendu : quitte à prendre un assez grand nombre de termes), cela se traduit par

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$$

7. (a)

numéro du strip	1	2	3	4	5
Nombre de cases	1	1	2	4	8

On remarque qu'à partir de la bande 2, le nombre de cases double à chaque bande.

(b) La première case a une largeur de 1, la seconde a une largeur de $\frac{1}{2}$, la troisième de $\frac{1}{3}$, etc. La $n^{\text{ième}}$ a une largeur de $\frac{1}{n}$ unité.

© CultureMath et Olivier Longuet

(c)

numéro du strip	1	2	3	4	5
Largeur du strip	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}\approx 0,58$	$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=\frac{1066}{1680}\approx 0,63$	$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+...+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\approx 0,66$

8. Le trait pointillé vertical marque la moitié d'une unité, si la bande le dépasse, alors sa largeur sera supérieure à 0,5.
9. Soit (l_n) la suite donnant la largeur du $n^{\text{ième}}$ strip.
$l_1 = 1 \geq \frac{1}{2}$;
$l_2 = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$;
$\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ donc $l_3 = \frac{1}{3}+\frac{1}{4} > 2\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{5} > \frac{1}{6} > \frac{1}{7} > \frac{1}{8}$ donc $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > 4\times\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{9} > \frac{1}{10} > \frac{1}{11} > \frac{1}{12} > \frac{1}{13} > \frac{1}{14} > \frac{1}{15} > \frac{1}{16}$ donc $\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16} > 8\times\frac{1}{16} = \frac{1}{2}$
10. On peut généraliser au-delà : Comme à partir de $n = 2$, le nombre de cases par strip double à chaque fois, on peut exprimer la suite sous la forme d'une suite géométrique de raison 2 . Si on définit la suite (u_n) qui donne le nombre de cases par strip, on a donc $u_1 = 1$; $u_2 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n$ pour tout $n \geq 2$.
On peut aussi écrire $u_1 = 1$ et $u_n = 2^{n-2}$ si $n \geq 2$ La dernière case de la $n^{\text{ième}}$ bande est la case numéro 2^{n-1} La première case de la $n^{\text{ième}}$ bande est la case numéro $2^{n-2}+1$. La largeur totale du strip n est donc
$$L_n = \sum_{k=2^{n-2}+1}^{k=2^{n-1}} \frac{1}{k} = \frac{1}{2^{n-2}+1} + \frac{1}{2^{n-2}+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$
On remarque que de tous ces termes, le plus petit est le dernier, c'est à dire $\frac{1}{2^{n-1}}$, on peut donc minorer la largeur totale du strip par le produit du nombre de cases par la largeur de la plus petite, c'est à dire, si $n \geq 2$:
$$L_n \geq 2^{n-2} \times \frac{1}{2^{n-1}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$
. De plus, $L_1 = 1$. Donc, pour tout $n \geq 0$, $L_n \geq \frac{1}{2}$
11. On peut écrire
$$S_{2^n} = \underbrace{\frac{1}{1}}_{L_1=1} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}}_{L_2\geq\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{L_2\geq\frac{1}{2}} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-2}+1}+\frac{1}{2^{n-2}+2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\right)}_{L_n\geq\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+...+\frac{1}{2^{n}}\right)}_{L_{n+1}\geq\frac{1}{2}}}_{n \text{ termes}}$$
Donc $S_{2^n} \geq 1 + \frac{1}{2}n$.
12. On a $\lim_{n\to+\infty} 1+2n = +\infty$, mais on a aussi que $S_{2^n} \geq 1+\frac{1}{2}n$. Par comparaison, on peut en déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} S_{2^n} = +\infty.$$
D'après la définition de la limite $+\infty$ en $+\infty$, pour tout $A > 0$, on peut trouver une valeur N_0 à partir de laquelle pour tout $n \geq N_0$, $S_{2^n} > A$.
En posant $N_1 = 2^{N_0}$, on peut dire que pour tout $n > N_1$, $S_n > A$.
On peut donc conclure que
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$
et donc la série harmonique diverge vers ∞.

© CultureMath et Olivier Longuet