

# DM et BD : la série harmonique



Une série est une somme de termes d'une suite. Soit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , la série  $(S_n)$  associée est définie par la somme des premiers termes de la suite :

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

(dans certains cas, on commence avec  $k = 0$ ; on remarque qu'une série est en fait également une suite, dont les termes sont la somme d'une autre suite! C'est pourquoi dans ce qui suit, on appellera parfois la *série* simplement *suite*).

La série harmonique  $(H_n)$  est associée à la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $u_n = \frac{1}{n}$ . C'est donc la somme des  $n$  premiers inverses d'entiers :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

c'est-à-dire

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}.$$

1. Démontrer que la suite  $(H_n)$  est strictement croissante.
2. Compléter la fonction Python permettant de la calculer, puis calculer harmonique(5) sur la console.

```
def harmonique(n):  
    s = 0  
    for i in range(1, n+1):  
        s = ...  
    return ...
```

3. Remplir le tableau de valeurs suivant :

$n$	1	5	10	100	1000	100000
$H_n$						

4. Compléter la fonction seuil pour déterminer à partir de quel rang  $n$  le terme dépasse 15.

```
def seuil():  
    s = 0  
    i = ...  
    while s < 15:  
        s = s + 1 / i  
        i = ...  
    return i
```

5. Peut-on conjecturer la limite de la suite  $(H_n)$ ? La bande dessinée va nous donner la réponse.
6. Cases 3 et 4 : comment traduire mathématiquement l'affirmation d'Oresme?
7. Hors case 1 : en prenant comme unité la largeur de la case 1, pouvez vous expliquer cette mise en page biscornue?
  - (a) Combien y a-t-il de cases dans chaque strip (un strip est composé d'une bande horizontale de cases)?
  - (b) Y a-t-il un lien entre le numéro de la case et sa largeur?
  - (c) Calculer la largeur de chaque strip à  $10^{-3}$  près.
8. Un trait pointillé vertical dépasse du strip 2. À quoi correspond-il?
9. Expliquer pourquoi chacun des cinq strips a une largeur supérieure ou égal à  $\frac{1}{2}$ .

10. Supposons que la bande dessinée continue à l'infini (ce qui ne serait pas très lisible...). Combien de cases comptera le  $n^{\text{ième}}$  strip? Quel sera le rang de la première case du  $n^{\text{ième}}$  strip? De la dernière case du  $n^{\text{ième}}$  strip? Quelle sera la largeur totale du  $n^{\text{ième}}$  strip? Cette largeur sera-t-elle toujours supérieure à  $\frac{1}{2}$ ? Pourquoi?
11. Montrer que

$$S_{2^n} \geq 1 + \frac{1}{2}n.$$

12. Démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2^n} = +\infty$ . Que peut-on dire de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ ?



Dessin : Olivier Longuet