1802

Resolutio formulae diophanteae ab(maa+nbb)=cd(mcc+ndd) per numeros rationales

Leonhard Euler

RESOLUTIO FORMULAE DIOPHANTEAE

$ab(maa + nbb) = cd(mcc + ndd)$

PER NUMEROS RATIONALES.

Auctore L. EULERO.

Conventui exhibuit die 1. Decembr. 1778.

§. 1.

Inter theoremata olim a Fermatio demonstrata, et post ejus obitum deperdita, imprimis maximam attentionem meretur hoc theorema: quod non dentur duae potestates cujusque ordinis, quarum summa vel differentia sit potestas ejusdem ordinis, siquidem ordo primus et secundus excipiatur. Ita negavit Fermatius exhiberi posse binos numeros a et b, vt haec formula $a^n \pm b^n$ aequetur simili potestati c^n, simul atque exponens n binarium superaverit. Hoc ergo modo omnes istae positiones erunt impossibiles: I. $a^3 \pm b^3 = c^3$; II. $a^4 \pm b^4 = c^4$; III. $a^5 \pm b^5 = c^5$; IV. $a^6 \pm b^6 = c^6$; V. $a^7 \pm b^7 = c^7$; VI $a^8 \pm b^8 = c^8$ etc.

§. 2. De prima harum formularum $a^3 \pm b^3 = c^3$, veritas jam satis feliciter est ostensa, unde simul quoque veritas sequitur pro omnibus formulis, pro quibus exponens n, est multiplum ternarii. Tum vero multo clarius adhuc demonstrata est formula secunda $a^4 \pm b^4 = c^4$, cum evidentissime comprobatum sit, neque summam neque differentiam duorum biquadratorum posse esse quadratum, multo minus ergo

ergo biquadratum, hincque etiam evicti ſunt omnes caſus, quibus exponens n eſt multiplum quaternarii. Interim tamen ejusmodi demonſtratio, quae ſe pariter ad omnes exponentes n extendat, maxime adhuc deſideratur, neque cuiquam Geometrarum in hoc numerorum myſterium penetrare contigit.

§. 3. Pluribus autem inſignibus Geometris viſum eſt haec theoremata latius extendi poſſe. Quemadmodum enim duo cubi exhiberi nequeunt, quorum ſumma vel differentia ſit cubus, ita etiam certum eſt, nequidem exhiberi poſſe tria biquadrata, quorum ſumma sit pariter biquadratum, ſed ad minimum quatuor biquadrata requiri, vt eorum ſumma prodire queat biquadratum, quamquam nemo adhuc talia quatuor biquadrata aſſignare potuerit. Eodem modo etiam aſſirmari poſſe videtur, non exhiberi poſſe quatuor poteſtates quintas, quarum ſumma etiam eſſet poteſtas quinta; ſimilique modo res ſe habebit in altioribus poteſtatibus; unde ſequentes quoque poſitiones omnes pro impoſſibilibus erunt habendae:

I. $a^3 + b^3 = c^3$,

II. $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$,

III. $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 = e^5$,

IV. $a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6 = f^6$

etc. etc.

Plurimum igitur ſcientia numerorum promoveri eſſet cenſenda, ſi demonſtrationem deſideratam etiam ad has formulas extendere liceret.

§. 4. Primo quidem intuitu videri poſſet has poſtremas formulas non ſolum ad ſummas, ſed etiam ad differentias, prouti in prima vſu venit, extendi poſſe, ita vt etiam haec aequa-

aequalitas $a^4 \pm b^4 \pm c^4 = d^4$ pro impoffibili effet habenda; verum hoc longe fecus fe habere ante aliquot annos obfervavi, in tomo commentariorum XVII. pag. 64. vbi bina biquadrata affignavi, quorum fumma in alia duo biquadrata refolvi queat, ita vt fit $a^4 + b^4 = c^4 + d^4$, unde ergo haec aequalitas $a^4 + b^4 - c^4 = d^4$ veritati neutiquam adverfatur; verum numeri, quos pro his litteris a, b, c, d, per calculum valde taediofum erui, valde immanes prodierunt.

§. 5. Cum autem nuper idem argumentum tractandum fufcepiffem, praeter omnem expectationem incidi in numeros multo minores hac indole praeditos, atque adeo minimi numeri hoc praeftantes ftatui poffunt ifti: $a = 134$; $b = 133$; $c = 158$; et $d = 59$, quandoquidem revera deprehendetur effe $134^4 + 133^4 = 158^4 + 59^4$, quem calculum exfequi haud adeo moleftum eft, dum contra comprobationem illorum immenforum numerorum vix quisquam tentare audebit.

§. 6. Methodus autem, qua tum temporis fum vfus, vt refolverem hanc aequalitatem: $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$, ita procedebat: confideravi fcilicet hanc aequationem $A^4 - C^4 = D^4 - B^4$, ac pofito $A = a + b$; $C = a - b$; $D = c + d$ et $B = c - d$, prodiit ifta aequatio fatis fimplex: $ab(aa + bb) = cd(cc + dd)$; ficque totum negotium ad refolutionem hujus formulae reducitur. Hic autem non folum methodum ante vfitatam, multo tractabiliorem fum redditurus, fed etiam ad refolutionem formulae multo generalioris in titulo exhibitae $ab(maa + nbb) = cd(mcc + ndd)$ fum accommodaturus; ita vt, quicunque numeri pro m et n accipiantur, femper infinitis modis numeri fatisfacientes pro a, b, c, d inveniri queant.

§. 7.

§. 7. Ad aequalitatem autem hanc resolvendam vtor ante omnia hac transformatione: $b = cp$ et $d = aq$, hocque modo aequatio resolvenda hanc induet formam: $p(maa + nccpp) = q(mcc + naaqq)$, unde elicitur $\frac{aa}{cc} = \frac{np^3 - mq}{nq^3 - mp}$, sicque totum negotium huc redit, vt ista formula $\frac{np^3 - mq}{nq^3 - mq}$ ad quadratum reducatur, quod quidem sponte evenire casu $q = p$ mox in oculos incurrit, cum evadat $\frac{aa}{cc} = 1$, ideoque $c = a$; tum quoque fiet $b = \partial$, qui autem casus maxime obvius pro solutione neutiquam haberi potest, quandoquidem ambo membra aequationis prodeunt identica. Interim tamen hic ipse casus ad alias solutiones manuducere poterit.

§. 8. Cum igitur nostra formula revera quadratum evadat posito $p = q$, statuamus $p = q(1 + z)$, ita ut sumpto $z = 0$ ipse casus obvius prodeat; nunc autem nostra formula in sequentem transmutabitur: $\frac{aa}{cc} = \frac{nq^3(1+z)^3 - m}{nqq - m(1+z)}$, sive

$$\frac{aa}{cc} = \frac{nqq - m + 3nqqz + 3nqqzz + nqqz^3}{nqq - m - mz}$$

in qua fractione quantitas incognita z in numeratore ad tertiam potestatem, in denominatore autem non ultra primam assurgit, cujusmodi formulas per methodos cognitas tractari posse jam satis liquet.

§. 9. Quo hanc fractionem tractabiliorem reddamus, tam numeratorem quam denominatorem dividamus per $nqq - m$, statuamusque brevitatis gratia $\frac{nqq}{nqq-m} = \alpha$ et $\frac{m}{nqq-m} = \beta$, ita vt fit $\alpha - \beta = 1$, ideoque $\alpha = 1 + \beta$, quo facto formula sequens prodibit $\frac{aa}{cc} = \frac{1 + 3\alpha z + 3\alpha zz + \alpha z^3}{1 - bz}$. Jam per secundam methodum, qua olim sum usus, denominator reddatur quadratum, multiplicando supra et infra per $1 - bz$, unde prodit $\frac{aa}{cc} = \frac{(1 - bz)(1 + 3\alpha z + 3\alpha zz + \alpha z^3)}{(1 - bz)^2}$. Sicque tantum opus est vt vt numerator, qui evolutus fit

$$1 + (3\alpha - \beta)\, z + 3\,\alpha(1 - \beta)\, zz + \alpha(1 - 3\beta)\, z^3 - \alpha\beta z^4$$

ad quadratum reducatur, quod praeftabitur ejus radicem ponendo $1 + fz + gzz$, cujus quadratum eft

$$1 + 2fz + (ff + 2fg)\, zz + 2fgz^3 + ggz^4.$$

Nunc quia primi termini fe mutuo fponte deftruunt, binae litterae f et g ita definiantur, vt etiam fecundi ac tertii termini tollantur; prius fiet fumendo $f = \frac{3\alpha - \beta}{2}$, pofterius vero ftatuendo $ff + 2g = 3\alpha(1 - \beta)$, unde fit $g = \frac{3\alpha(1-\beta)}{2} - \frac{1}{2} ff$. Quoniam igitur utrinque tantum bini termini poftremi remanent, qui per z^3 divifi praebent hanc aequationem: $\alpha(1 - 3\beta) - \alpha\beta z = 2fg + ggz$, inde elicitur $z = \frac{\alpha(1 - 3\beta) - 2fg}{\alpha\beta + gg}$.

§. 10. Haec eft ea ipfa folutio, qua jam dudum loco citato fum vfus, cujus ope pro quovis valore ipfius q ad arbitrium affumpto, fimul innotefcunt litterae α et β, unde valor idoneus pro z obtinetur, quo invento primo erit $p = q(1 + z)$, ac denique erit $\frac{aa}{cc} = \frac{(1 + fz + gzz)^2}{(1 - \beta z)^2}$ ideoque $\frac{a}{c} = \frac{1 + fz + gzz}{1 - \beta z}$, unde ergo fumi poterit $a = 1 + fz + gzz$ et $c = 1 - \beta z$; tandem vero habebitur $b = cp$ et $d = aq$, ficque quaeftioni propofitae erit fatisfactum.

§. 11. Hoc autem modo pro cafu quem olim tractavi, $m = n = 1$ pro q vnitas accipi nequit, quia litterae α et β evaderent infinitae; iidem vero enormes numeri, quo tum exhibui, reperiuntur, dum pro q vel 2 vel 3 affumitur. Quodfi autem non fuerit $m = n$, nihil obftat, quo minus ftatuatur $q = 1$, hincque folutiones fatis commodae obtineri poterunt; femper autem tum erit $d = a$, quod fortaffe difplicere poteft.

§. 12. Hac igitur methodo repudiata aliam viam ſum ingreſſurus, quae ad ſolutiones multo ſimpliciores perducet, quaeque ita eſt comparata, vt non perveniatur ad quartam poteſtatem ipſius z. Hunc in finem ſtatim pono $\frac{a}{c} = 1 + sz$, ita vt habeamus: $\frac{1 + 3\alpha z + 3\alpha zz + \alpha z^3}{1 - \beta z} = (1 + sz)^2$, qua aequatione evoluta et omnibus terminis ad eandem partem translatis pervenietur ad hanc aequationem:

$$\left.\begin{array}{l} +1 + 3\alpha z + 3\alpha zz + \alpha z^3 \\ -1 - 2sz - sszz + \beta ssz^3 \\ \quad + \beta z + 2\beta szz \end{array}\right\} = 0$$

quae redigitur ad hanc formam:

$$3\alpha - 2s + \beta + (3\alpha + 2\beta s - ss)z + (\alpha + \beta ss)zz = 0.$$

§. 13. Ut nunc ex hac aequatione incognita z commode deduci queat, hoc imprimis duobus modis fieri poterit, quorum primus adhiberi poterit, ſi ſtatuere licebit $\alpha + \beta ss = 0$, ſive $ss = -\frac{\alpha}{\beta}$, id quod locum habere nequit, niſi $-\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{nqq}{m}$ fuerit quadratum, quamobrem iſte caſus tum tantum adhiberi poterit, quando numerorum m et n alter fuerit negativus, inſuperque eorum productum quadratum. Pro hoc igitur caſu ponamus $m = \mu\mu$ et $n = -\nu\nu$, vt aequalitas reſolvenda ſit $ab(\mu\mu aa - \nu\nu bb) = cd(\mu\mu cc - \nu\nu dd)$; tum igitur erit $\alpha = \frac{+\nu\nu qq}{\mu\mu + \nu\nu qq}$ et $\beta = \frac{-\mu\mu}{\mu\mu + \nu\nu qq}$ ſtatuique poterit $ss = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\nu\nu qq}{\mu\mu}$, ideoque $s = \frac{\nu q}{\mu}$. Hoc modo aequatio poſtrema erit $3\alpha - 2s + \beta + (3\alpha + 2\beta s - ss)z = 0$, unde colligitur $z = \frac{2s - 3\alpha - \beta}{3\alpha + 2\beta s - ss}$, factisque ſubſtitutionibus erit

$$z = \frac{\mu\mu(\mu\mu - 3\nu\nu qq) + 2\mu\nu q(\mu\mu + \nu\nu qq)}{\mu\mu(3\nu\nu qq - 2\mu\nu q) - \nu\nu qq(\mu\mu + \nu\nu qq)}.$$

§. 14.

§. 14. Hic autem praeter omnem neceſſitatem introduximus binas novas litteras μ et ν; nihil enim impedit, quo minus loco μa, νb, μc, νd, ſimpliciter ſcribantur litterae a, b, c, d, ita vt formula reſolvenda evadat $ab(aa-bb) = cd(cc-dd)$, perinde ac ſi ſumpſiſſemus $\mu = 1$ et $\nu = 1$, unde ſolutio multo brevior obtinebitur.

Reſolutio formulae particularis
$ab(aa-bb) = cd(cc-dd)$.

Hic igitur ſumpto pro q numero quocumque erit $\alpha = \frac{qq}{1+qq}$ et $\beta = \frac{-1}{1+qq}$; tum vero ſumi oportet $s = q$, unde poſtrema aequatio erit

$3qq - 1 - 2q - 2q^3 + z(2qq - 2q - q^4) = 0$, ideoque $z = \frac{1+2q-3qq+2q^3}{q(-2+2q-q^3)}$. Hoc valore invento erit $p = q(1+z)$ et $\frac{a}{c} = 1 + qz$, unde porro reliquae litterae b et d facile aſſignabuntur.

§. 15. Statuamus nunc primo $q = 1$, eritque $z = -2$; deinde $\frac{a}{c} = -1$, ideoque $c = -a$; porro ob $p = -1$ erit $b = a$ et $d = a$. Hoc ergo caſu omnes quatuor litterae eſſent aequales, et ambo formulae membra $= 0$. Idem prodiret, ſi poneremus $q = -1$: perpetuo enim obſervaſſe juvabit, perinde eſſe ſive ipſi q tribuatur valor poſitivus, ſive negativus. Sumamus igitur, vt idoneum exemplum proferamus, $q = 2$, eritque $z = -\frac{3}{4}$, ideoque $p = \frac{1}{2}$ et $\frac{a}{c} = -\frac{1}{2}$, ergo $c = -2a$, porro $b = -a$ et $d = 2a$. Hoc autem modo in praecedens incommodum incidimus. Sit ergo $q = 3$, eritque $z = -\frac{34}{69}$, hinc $p = \frac{35}{23}$ et $\frac{a}{c} = -\frac{11}{23}$, ita ſumi poterit

$a =$

$a = 11$ et $c = -23$, eritque $b = -35$ et $d = 3a = 33$. Hoc modo peruenimus ad hanc aequalitatem: $11 . 35 (35^2 - 11^2) = 23 . 33 (33^2 - 23^2)$, cujus ratio est manifesta, cum vtrumque membrum in factores euolutum praebeat $2^4 . 3 . 5 . 7 . 11 . 23$. Hinc duo triangula rectangula exhiberi possunt, quorum areae inter se sunt aequales; prioris enim catheti erunt $2 . 11 . 35$ et $24 . 56$, alterius vero trianguli $2 . 23 . 33$ et $10 . 56$.

Reversio ad formulam generalem

$$ab(maa + nbb) = cd(mcc + ndd.)$$

§. 16. Quando autem in aequatione quadrata §. 13, vltimum terminum zz ad nihilum redigere non licet, semper hoc fieri potest in primo termino absoluto, unde fit $3\alpha - 2s + \beta = 0$, ex qua aequatione elicitur $2s = 3\alpha + \beta$ siue $s = \frac{4\alpha - 1}{2}$. Hoc igitur primo termino sublato duo reliqui per z diuisi dant hanc aequationem: $3\alpha + 2\beta s - ss + (\alpha + \beta ss) z = 0$, quae aequatio abit in hanc: $\frac{3}{4} + (\alpha + \beta ss) z = 0$, unde fit $z = \frac{-3}{4\alpha + 4\beta ss}$. Cum igitur fit $2s = 4\alpha - 1$, erit $z = \frac{-3}{4\alpha + \beta(4\alpha - 1)^2}$ unde deducitur sequens solutio nostri problematis, quo requiritur vt fiat $ab(maa + nbb) = cd(mcc + ndd)$.

§. 17. Primo posito $b = cp$ et $d = aq$ fecimus $p = q(1 + z)$; tum vero, sumpta littera q pro lubitu, posuimus breuitatis gratia $\alpha = \frac{nqq}{nqq - m}$ et $\beta = \frac{m}{nqq - m}$, ita vt fit $\alpha - \beta = 1$. Quo facto inuenimus $z = \frac{-3}{4\alpha + \beta(4\alpha - 1)^2}$, unde definitur $p = q(1 + z)$. Deinde posito $s = \frac{4\alpha - 1}{2} = \frac{3\alpha + \beta}{2}$ inuenimus esse $\frac{a}{c} = 1 + sz$, unde cum $1 + sz$ fit plerumque fractio, hinc ambae litterae a et c facile per numeros integros assignantur; quibus inueninventis erit $b = cp$ et $d = aq$, quam solutionem aliquot exemplis illustremus.

Exemplum I.

quo haec formula resolvenda proponitur:

$$ab(aa + 2bb) = cd(cc + 2dd).$$

§. 18. Hic igitur est $m = 1$ et $n = 2$, unde sumpto numero $q = 1$ erit $\alpha = 2$ et $\beta = 1$, hincque $s = \frac{7}{2}$ et $z = -\frac{1}{19}$, ideoque $p = \frac{18}{19}$; tum vero $\frac{a}{c} = \frac{31}{38}$, quocirca sumamus $a = 31$ et $c = 38$, unde denique fit $b = 36$ et $d = 31$, ita vt solutio futura sit $31 \cdot 36(31^2 + 2 \cdot 36^2) = 38 \cdot 31(38^2 + 2 \cdot 31^2)$, id quod calculum instituenti mox patebit. Est enim $31^2 + 2 \cdot 36^2 = 3553 = 11 \cdot 17 \cdot 19$ et $38^2 + 2 \cdot 31^2 = 3366 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17$, quibus factoribus substitutis vtrinque prodit idem productum $2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31$.

Alia solutio ejusdem exempli.

§. 19. Sumatur hic $q = \frac{1}{2}$, eritque $\alpha = -1$ et $\beta = -2$. Deinde vero erit $s = -\frac{5}{2}$ et $z = \frac{1}{18}$, hinc ergo colligimus $p = \frac{19}{36}$ et $\frac{a}{c} = \frac{31}{36}$. Capiatur ergo $a = 31$ et $c = 36$, ex quibus denique fit $b = 19$ et $d = \frac{31}{2}$; unde, hos numeros duplicando, habebimus $a = 62$; $b = 38$; $c = 72$ et $d = 31$, ita vt sit $62 \cdot 38(62^2 + 2 \cdot 38^2) = 72 \cdot 31(72^2 + 2 \cdot 31^2)$, vbi per factores est $62^2 + 2 \cdot 38^2 = 6732 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17$ et $72^2 + 2 \cdot 31^2 = 7106 = 2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19$. Sicque vtrinque prodit idem productum $2^4 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31$.

Exemplum II.

quo haec formula resolvenda proponitur:

$$ab(aa + 3bb) = cd(cc + 3dd).$$

§. 20. Hic ergo est $m = 1$ et $n = 3$ hincque $\alpha = \frac{5qq}{3qq-1}$ et $\beta = \frac{1}{3qq-1}$. Sumamus nunc primo $q = 1$, vt sit $\alpha = \frac{5}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$,

hinc

hinc autem fiet $s = \frac{5}{2}$ et $z = -\frac{6}{37}$, quamobrem erit $p = \frac{31}{37}$ et $\frac{a}{c} = \frac{22}{37}$. Capiatur ergo $a = 22$ et $c = 37$, fietque $b = 31$ et $d = 22$, consequenter habebimus

$22 \cdot 31\,(22^2 + 3 \cdot 31^2) = 37 \cdot 22\,(37^2 + 3 \cdot 22^2)$. Hic scilicet erit $22^2 + 3 \cdot 31^2 = 3367 = 7 \cdot 13 \cdot 37$ et $37^2 + 3 \cdot 22^2 = 2821 = 7 \cdot 13 \cdot 31$; sicque vtrinque idem oritur productum, scilicet $2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 37$.

Alia solutio ejusdem exempli.

§. 21. Sumatur $q = \frac{1}{2}$, eritque $\alpha = -3$ et $\beta = -4$, hincque porro $s = -\frac{13}{2}$ et $z = \frac{3}{683}$, quocirca habebimus $p = \frac{691}{1376}$ et $\frac{a}{c} = \frac{1337}{1376}$. Capiatur ergo $a = 1337$ et $c = 1376$, unde fit $b = 691$ et $d = \frac{1337}{2}$. Duplicatis ergo valoribus habebimus $a = 2674$; $b = 1382$; $c = 2752$ et $d = 1337$.

Adhuc alia solutio ejusdem exempli.

§. 22. Sumamns hic $q = 2$, eritque $\alpha = \frac{12}{11}$ et $\beta = \frac{1}{11}$, unde fit $s = \frac{37}{22}$ et $z = -\frac{3993}{6977}$; ex quo fit $p = \frac{5968}{6977}$, porro vero $sz = -\frac{13431}{13954}$, ideoque $\frac{a}{c} = \frac{523}{13954}$. Sicque sumi poterit $a = 523$ et $c = 13954$, unde tandem fit $b = 11936$ et $d = 1046$.

§. 23. Casum principalem, quo $m = 1$ et $n = 1$, quandoquidem hinc inventio binorum biquadratorum pendet, quorum summam in alia duo biquadrata resolvere liceat, peculiari tractationi reservamus, quae ergo continebit evolutionem hujus formulae $ab\,(aa + bb) = cd\,(cc + dd)$.

§. 24. Cum igitur hic sit $m = 1$ et $n = 1$, pro quolibet numero ad lubitum assumpto q capiatur $\alpha = \frac{qq}{qq-1}$ et $\beta = \frac{1}{qq-1}$, unde porro accipiatur $s = \frac{3\alpha + \beta}{2}$ atque $z = \frac{-3}{4\alpha + \beta(3\alpha+\beta)^2}$, quibus

bus valoribus inventis erit $p = q(1+z)$ et $\frac{a}{c} = 1 + sz$. Denique vero erit $b = cp$ et $d = \alpha = aq$, quibus praemissis ad exempla descendamus.

Exemplum I. quo $q = 3$.

§. 24. Evidens scilicet est hoc casu sumi non posse $q = 1$, quia litterae α et β fierent infinitae; deinde vero facile est praevidere, positionem $q = 3$ simpliciorem solutionem suppeditare quam $q = 2$. Sumpto igitur $q = 3$ erit $\alpha = \frac{9}{8}$ et $\beta = \frac{1}{8}$, unde fit $s = \frac{7}{4}$ atque $z = -\frac{96}{193}$. Hinc ergo colligitur $p = \frac{291}{193}$, tum vero $sz = -\frac{168}{193}$, ideoque $\frac{a}{c} = 1 + sz = \frac{25}{193}$; quocirca capiatur $a = 25$ et $c = 193$, eritque $b = 291$ et $d = 75$. Sicque pertingimus ad hanc solutionem

$$25 \cdot 291 \, (25^2 + 291^2) = 193 \cdot 75 \, (193^2 + 75^2)$$

ubi notetur esse

$$25^2 + 291^2 = 85306 = 2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 193 \text{ et}$$

$$193^2 + 75^2 = 42879 = 2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 97.$$

Nunc autem facile perspicitur idem productum utrinque per factores eosdem prodire $2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 97 \cdot 193$.

§. 25. Transferamus nunc hanc solutionem ad biquadrata, atque in genere si fuerit $ab(aa+bb) = cd(cc+dd)$, statuatur $a = p+q$ et $b = p-q$, similique modo $c = r+s$ et $d = r-s$, prodibitque ista aequatio: $2(p^4 - q^4) = 2(r^4 - s^4)$. Hoc ergo modo erit $p^4 + s^4 = q^4 + r^4$, vbi notetur esse $p = \frac{a+b}{2}$; $q = \frac{a-b}{2}$; $r = \frac{c+d}{2}$ et $s = \frac{c-d}{2}$; sive duplicando, sumere licebit $p = a+b$; $q = a-b$; $r = c+d$ et $s = c-d$. Ex casu igitur modo invento colligimus $p = 158$ $q = 133$; $r = 134$; et $s = 59$.

§. 26. Hi numeri prorsus conueniunt cum iis, quos initio commemoravimus, atque adeo sine dubio simplicissi-

mam

mam solutionem illius problematis, quod olim tractaveram, suppeditant, cum sit $158^4+59^4=133^4+134^4$. Hic autem praeter expectationem se offert alia solutio nostrae formulae $ab(aa+bb)=cd(cc+dd)$, hinc enim sequitur fore $158^4-134^4=133^4-59^4$, unde in factores resolvendo fit $24\cdot 292(158^2+134^2)=74\cdot 192(133^2+59^2)$; vbi notetur ob $pp+qq=\frac{1}{2}(p+q)^2+\frac{1}{2}(p-q)^2$, fore $158^2+134^2=\frac{1}{2}(292)^2+\frac{1}{2}(24)^2$, similique modo $133^2+59^2=\frac{1}{2}(192)^2+\frac{1}{2}(74)^2$, quibus substitutis prodit forma nostrae similis

$$24\cdot 292(292^2+24^2)=74\cdot 192^2(74^2+192^2)$$

singulisque factoribus per 2 divisis erit

$$12\cdot 146(146^2+12^2)=37\cdot 96(37^2+96^2).$$

§. 27. Ecce ergo deducti sumus ad solutionem adhuc simpliciorem nostrae formulae $ab(aa+bb)=cd(cc+dd)$, qua est $a=12$; $b=146$; $c=37$ et $d=96$. Siquidem hi numeri notabiliter sunt minores, quam supra inventi; unde sequitur methodus generalis ex qualibet solutione nostrae formulae aliam solutionem derivandi. Cum enim posito $a+b=p$; $a-b=q$; $c+d=r$ et $c-d=s$, prodeat haec aequalitas: $p^4+s^4=q^4+r^4$, inde vicissim erit $p^4-r^4=q^4-s^4$, unde sumptis factoribus erit

$$(p+r)(p-r)(pp+rr)=(q+s)(q-s)(qq+ss), \text{ sive}$$
$$(p+r)(p-r)[(p+r)^2+(p-r)^2]=(q+s)(q-s)[(q+s)^2+(q-s)^2].$$

Quamobrem si statuamus $p+r=a'$; $p-r=b'$; $q+s=c'$ et $q-s=d'$, habebimus $a'b'(a'a'+b'b')=c'd'(c'c'+d'd')$, quae ergo aequalitas locum habebit, si sumatur $a'=(a+b)+(c+d)$; $b'=(a+b)-(c+d)$; $c'=(a-b)+(c-d)$ et $d'=(a-b)-(c-d)$.

§. 28. Cum igitur invenissemus $a=291$; $b=25$; $c=193$ et $d=75$, erit $a+b=316$; $a-b=266$; $c+d=268$ et $c-d=118$.

Hinc

Hinc colligitur fore $a' = 584$; $b' = 48$; $c' = 384$ et $d' = 148$, qui numeri per 4 depreſſi praebent ſolutionem ſimpliciſſimam, ſcilicet: $a' = 146$; $b' = 12$; $c' = 96$ et $d' = 37$; ita vt ſit $146 \cdot 12\,(146^2 + 12^2) = 96 \cdot 37\,(96^2 + 37^2)$, ubi nempe eſt $146^2 + 12^2 = 21460 = 2^2 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 37$ et $96^2 + 37^2 = 10585 = 5 \cdot 29 \cdot 73$; et nunc vtrinque reſultat idem productum $2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 73$. Ob inſignem igitur vſum hujus regulae eam ſequenti theoremate complectamur.

Theorema.

§. 29. *Si quatuor numeri* a, b, c, d *ita fuerint comparati, vt ſit* $ab(aa + bb) = cd(cc + dd)$, *tum ſi inde formentur iſti quaterni numeri*: $A = (a + b) + (c + d)$; $B = (a + b) - (c + d)$; $C = (a - b) + (c - d)$ et $D = (a - b) - (c - d)$, *erit quoque* $AB(A^2 + B^2) = CD(C^2 + D^2)$.

Hinc igitur patet pro qualibet ſolutione ſemper dari adhuc aliam ipſi conjugatam, ope hujus theorematis inveniendam, ita vt perpetuo binae ſolutiones conjugatae exhiberi queant, quae ita invicem ſunt connexae, vt ope theorematis altera ex altera definiatur.

§. 30. Quo nunc hinc alias ſolutiones facilius invenire liceat, formulas repertas ita adornemus, vt inde ſtatim valores integri pro numeris a, b, c, d exhiberi queant. Hunc in finem, quoniam etiam pro q fractiones accipere licet, ſtatim ponamus $q = \frac{f}{g}$, eritque $\alpha = \frac{ff}{ff - gg}$ et $\beta = \frac{gg}{ff - gg}$, unde fit $s = \frac{3ff + gg}{2(ff - gg)}$. Hinc cum porro fit $z = \frac{-3}{4\alpha^3 + \beta(3\alpha + \beta)^2}$, erit $z = \frac{-3(ff - gg)^3}{4f^6 + f^4 gg + 10ff g^4 + g^6}$, unde fit $1 + z = \frac{f^6 + 10f^4 gg + ff g^4 + 4g^6}{4f^6 + f^4 gg + 10ff g^4 + g^6}$, tum vero erit $sz = -\frac{3(ff + gg)(ff - gg)^2}{2(4f^6 + f^4 gg + 10ff g^4 + g^6)}$, ergo $1 + sz = -\frac{-f^6 + 17f^4 gg + 17ff g^4 - g^6}{2(4f^6 + f^4 gg + 10ff g^4 + g^6)} = \frac{(ff + gg)(-f^4 + 18ff gg - g^4)}{2(4f^6 + f^4 gg + 10ff g^4 + g^6)}$.

§. 31.

§. 31. Cum igitur posuissemus $p = q(1+z) = \frac{f}{g}(1+z)$, erit $p = \frac{f(f^6+10f^4gg+ffg^4+4g^6)}{g(4f^6+f^4gg+10ffg^4+g^6)}$. Denique habebamus $\frac{a}{c} = 1+8z$, unde si statuamus

$a = (ff+gg)(-f^4+18ffgg-g^4)$ et $c = 2(4f^6+f^4gg+10ffg^4+g^6)$, cum fuerit $b = pc$ et $d = aq$, erit $b = \frac{2f(f^6+10f^4gg+ffg^4+4g^6)}{g}$ et tandem $d = \frac{f(ff+gg)(-f^4+18ffgg-g^4)}{g}$. Multiplicemus igitur omnes hos valores per g, eritque vt sequitur:

$a = g(ff+gg)(-f^4+18ffgg-g^4)$; $c = 2g(4f^6+f^4gg+10ffg^4+g^6)$

$b = 2f(f^6+10f^4gg+ffg^4+4g^6)$; $d = f(ff+gg)(-f^4+18ffgg-g^4)$.

§. 32. Hae quidem formulae numeros vehementer magnos producunt, qui autem plerumque per communem divisorem ad numeros multo minores redigi possunt. Veluti si, vt supra fecimus, sumamus $f = 3$ et $g = 1$, nostrae formulae dabunt $a = 800$; $b = 9312$; $c = 6176$; et $d = 2400$; hi autem numeri omnes divisionem admittunt per 32, quo pacto ad ipsos numeros supra inventos deprimuntur.

Exemplum II. quo $f = 2$ et $g = 1$.

§. 33. Substitutis his valoribus reperiemus $a = 5 \cdot 55 = 275$; $b = 928$; $c = 626$ et $d = 550$, qui numeri vlterius ad minores deprimi non possunt. Hujus solutionis etiam exhibeamus suam coniugatam secundum theorema supra datum; erit ergo $A = 2379$; $B = 27$; $C = 729$; et $D = 577$. Sicque duas nacti sumus novas solutiones.

Alia solutio

aequationis $ab(aa+bb) = cd(cc+dd)$.

§. 34. Posito vt ante $b = cp$ et $d = aq$ adepti sumus hanc aequationem: $\frac{aa}{cc} = \frac{p^3-q}{q^3-p}$, ita vt hanc fractionem ad ad quadratum redigi oporteat, ad quod praeſtandum hic alia via vtamur quam in forma generali adhibere non licuiſſet. Statuamus ſcilicet $p = 1 + \alpha z$ et $q = 1 + \beta z$, reperieturque $\frac{aa}{cc} = \frac{3\alpha - \beta + 3\alpha\alpha z + \alpha^3 zz}{3\beta - \alpha + 3\beta\beta z + \beta^3 zz}$, ſicque pervenimus ad fractionem, in qua quantitas incognita z tam in numeratore quam in denominatore non vltra quadratum aſſurgit, cujusmodi formulae ſatis commode tractari poſſunt, ſi fuerint vel primae partes abſolutae quadrata, vel ſi partes poſtremae fuerint quadrata.

Evolutio caſus prioris,

quo formulae $3\alpha - \beta$ et $3\beta - \alpha$ ſunt quadrata.

§. 35. Statuamus igitur $3\alpha - \beta = ff$ et $3\beta - \alpha = gg$, eritque $\alpha = \frac{3ff + gg}{8}$ et $\beta = \frac{ff + 3gg}{8}$ hocque modo habebimus $\frac{aa}{cc} = \frac{ff + 3\alpha\alpha z + \alpha^3 zz}{gg + 3\beta\beta z + \beta zz}$, quamobrem ſtatuamus $aa = ff + 3\alpha\alpha z + \alpha^3 zz$ et $cc = gg + 3\beta\beta z + \beta^3 zz$. Jam vt has formulas ad quadrata reducamus, formemus hanc aequalitatem: $aagg - ccff = 3(\alpha\alpha gg - \beta\beta ff)z + (\alpha^3 gg - \beta^3 ff)zz$, et quia hic membrum ſiniſtrum duos habet factores $ag + cf$ et $ag - cf$, etiam membrum dextrum in duos factores reſolvi oportet, quorum alter ſtatuatur $ag + cf = \frac{z}{\lambda}$, eritque alter $ag - cf = 3\lambda(\alpha\alpha gg - \beta\beta ff) + \lambda(\alpha^3 gg - \beta^3 ff)z$, vbi ad valorem λ inveniendum primo fiat $z = 0$ et addantur quadrata horum duorum factorum, quorum ſumma erit $2(aagg + ccff) = 9\lambda\lambda(\alpha\alpha gg - \beta\beta ff)^2$; at vero ex ipſis formulis propoſitis, poſito $z = 0$, ob $aa = ff$ et $cc = gg$, erit $2(aagg + ccff) = 4ffgg = 9\lambda\lambda(\alpha\alpha gg - \beta\beta ff)^2$, unde reperitur $\lambda = \frac{2fg}{3(\alpha\alpha gg - \beta\beta ff)}$, quae forma, ob $ff = 3\alpha - \beta$ et $gg = 3\beta - \alpha$, abit in hanc $\lambda = \frac{2fg}{3(\beta - \alpha)^2}$.

§. 36. Invento jam hoc valore pro λ bini factores erunt $ag + cf = \frac{3(\beta-\alpha)^3 z}{2fg}$ et $ag - cf = 2fg + \frac{2fg(\alpha^3 gg - \beta^3 ff)z}{3(\alpha\alpha gg - \beta\beta ff)}$, sive $ag - cf = 2fg + \frac{2fg(\beta+\alpha)(\beta\beta - 3\alpha\beta + \alpha\alpha)}{3(\beta-\alpha)^2}$. Statuamus autem brevitatis gratia $\frac{(\alpha+\beta)(\beta\beta - 3\alpha\beta + \alpha\alpha)}{3(\beta-\alpha)^2} = \Delta$, vt fit $ag - cf = 2fg + 2fg\Delta z$. Addantur nunc iterum quadrata harum formarum, et prodibit:

$$2(aagg + ccff) = 4ffgg + 8ffgg\Delta z + 4ffgg\Delta^2 zz + \frac{9(\beta-\alpha)^6 zz}{4ffgg}.$$

Ex ipsis autem formulis propositis colligimus

$$2(aagg + ccff) = 4ffgg + 6(\alpha\alpha gg + \beta\beta ff)z + 2(\alpha^3 gg + \beta^3 ff)zz:$$

ubi ergo prima membra se mutuo tollunt, reliqua per z divisa dabunt hanc aequationem:

$$6(\alpha\alpha gg + \beta\beta ff) + 2(\alpha^3 gg + \beta^3 ff)z = 8ffgg\Delta + 4ffgg\Delta^2 z + \frac{9(\beta-\alpha)^6 z}{4ffgg}$$

ex qua aequatione facile deducitur valor ipsius z. Has autem formulas vlterius non evoluamus, quoniam evolutio quovis casu speciali facilius instituetur.

Evolutio casus quo $f = 3$ et $g = 1$.

§. 37. Hic igitur erit $\alpha = \frac{7}{2}$ et $\beta = \frac{3}{2}$, hinc ergo fiet $aa = 9 + \frac{147}{4}z + \frac{343}{8}zz$ et $cc = 1 + \frac{27}{4}z + \frac{27}{8}zz$; porro vero erit $\Delta = -\frac{25}{48}$. Hinc ergo pro quantitate z invenienda habebimus hanc aequationem:

$$195 + \frac{293}{2}z = -\frac{75}{2} + \frac{625}{64}z + 16z = -\frac{75}{2} + \frac{1649}{64}z, \text{ sive}$$

$$\frac{465}{2} = -\frac{7727}{64}z, \text{ unde fit } z = -\frac{14880}{7727}.$$ Hoc modo perveniremus ad nimis magnos numeros, quos vltra evolvere opere non est pretium.

§. 38. Interim tamen haud difficile erit hinc adeo in genere valores idoneos pro litteris a, b, c, d exhibere.

Sumptis

Sumptis scilicet pro lubitu binis quadratis ff et gg, capiantur numeri α et β ita, vt sit $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3ff+gg}{3gg+ff}$; scilicet postquam fractio $\frac{3ff+gg}{3gg+ff}$ ad minimos terminos fuerit reducta, numerator pro α, denominator vero pro β accipiatur, quo facto erunt numeri quaesiti

$$a = f(\alpha+\beta)\ (\alpha\alpha - 3\alpha\beta + \beta\beta);$$
$$b = g(\beta^3 - 5\alpha\beta\beta + 4\alpha\alpha\beta - 2\alpha^3);$$
$$c = g\,(\alpha+\beta)\ (\alpha\alpha - 3\alpha\beta + \beta\beta);$$
$$d = f(\alpha^3 - 5\alpha\alpha\beta + 4\alpha\beta\beta - 2\beta^3).$$

Vel si ponatur $(\alpha+\beta)\ (\alpha\alpha - 3\alpha\beta+\beta\beta) = \Delta$, erit $a = f\Delta$; $b = g(\Delta - 3\alpha\ (\alpha-\beta)^2)$; $c = g\Delta$ et $d = f(\Delta - 3\beta(\alpha-\beta)^2)$. Harum formularum ope exempla multo facilius evolui poterunt.

§. 39. Ita si sumamus $f = 3$ et $g = 1$, erit $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$; erit ergo $\alpha = 7$ et $\beta = 3$, hinque $\Delta = -50$, quocirca ipsi numeri quaesiti reperiuntur $a = 150$; $b = 386$; $c = 50$ et $d = 582$, qui porro per binarium depressi fiunt $a = 75$; $b = 193$; $c = 25$ et $d = 291$.

§. 40. Consideremus nunc quoque casum, quo $f = 2$ et $g = 1$, eritque $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{13}{7}$; quare capiatur $\alpha = 13$ et $\beta = 7$, unde fit $\Delta = -1100$, hincque ipsi numeri quaesiti prodeunt $a = 2200$; $b = 2504$; $c = 1100$, $d = 3712$, qui per 4 depressi evadunt $a = 550$; $b = 626$; $c = 275$; $d = 928$; quae solutio convenit cum solutione supra §. 33. inventa.

§. 41. Fundamentum hujus Analyseos sequenti nititur problemati:

Proble-

Problema.

Propositis his duabus formulis: $xx + 2fxy + hyy$, nec non $xx + 2gxy + kyy$, invenire rationem inter numeros x et y, vt ambae iste formulae evadant quadrata.

Solutio.

§. 42. Ponatur $xx + 2fxy + hyy = P^2$ et $xx + 2gxy + kyy = Q^2$ ac differentia dabit $PP - QQ = 2(f-g)xy + (h-k)yy$. Statuatur alter factor $P - Q = (f-g)y$, eritque alter $P + Q = 2x + \frac{(h-k)y}{f-g}$. Jam quadrata horum duorum factorum addantur, prodibitque

$$2P^2 + 2Q^2 = 4xx + \frac{4(h-k)xy}{f-g} + \frac{(h-k)^2 yy}{(f-g)^2} + (f-g)^2 yy;$$

ex ipsis autem formulis propositis erit

$$2P^2 + 2Q^2 = 4xx + 4(f+g)xy + 2(h+k)yy,$$

unde quia primi termini $4xx$ se destruunt, reliqui per y divisi dant hanc aequationem:

$$4(f+g)x + 2(h+k)y = \frac{4(h-k)x}{f-g} + \frac{(h-k)^2 y}{(f-g)^2} + (f-g)^2 y$$

sive $4(f-g)[ff-gg-h+k]x = ([(h-k)^2 + (f-g)^2][(f-g)^2 - 2(h+k)])y$ hinc igitur erit $\frac{x}{y} = \frac{(f-g)^4 - 2(h+k)[(f-g)^2 + (h-k)^2]}{4(f-g)(ff-gg-h+k)}$.

§. 43. Supra adhuc mentionem fecimus alius casus, quo ambae formulae pro aa et cc ad quadrata redigi queant (§. 34;) vbi, vt partes postremae fiant quadrata, necesse est vt ambo numeri α et β sint quadrata. Sit igitur $\alpha = mm$ et $\beta = nn$, eritque

$$aa = m^6 zz + 3m^4 z + 3mm - nn \text{ et}$$
$$cc = n^6 zz + 3n^4 z + 3nn - mm.$$

§. 44.

§. 44. Has aequalitates vt ad formam ſuperioris problematis revocemus, ita repraeſentemus:

$$aan^6 = m^6n^6zz + 3m^4n^6z + 3mmn^6 - n^8 \text{ et}$$
$$ccm^6 = m^6n^6zz + 3n^4m^6z + 3nnm^6 - m^8$$

et jam facta comparatione erit $x = m^3n^3z$, ſumptoque $y = 1$, erit pro hoc caſu $2fm^3n^3z = 3m^4n^6z$, unde fit $f = \frac{3}{2}mn^3$ et $g = \frac{3}{2}nm^3$, denique vero $h = 3nnm^6 - m^8$ et $k = 3mmn^6 - n^8$, unde colligitur $f - g = \frac{3}{2}mn(nn - mm)$ et $h - k = 3nnm^6 + n^8 - 3mmn^6 - m^8 = (n^4 - m^4)(n^4 + m^4 - 3mmnn)$. Jam problema nobis praebet valorem $\frac{x}{y} = m^3n^3z = \frac{(f-g)^4 - 2(h-k)[(f-g)^2 - (h-k)^2]}{4(f-g)(ff-gg-h+k)}$.

§. 45. Coronidis loco subjungam hic adhuc aliam Analyſin pro reſolutione formulae $ab(aa+bb) = cd(cc+dd)$. Quoniam res perducta eſt ad hanc aequationem: $\frac{aa}{cc} = \frac{p^3-q}{q^3-p}$, ponatur $p = nn(q+1) - 1$, fietque

$$\frac{aa}{cc} = \frac{n^6(q+1)^3 - 3n^4(q+1)^2 + 3nn(q+1) - 1 - q}{q^3 - nn(q+1) + 1}$$

quae fractio per factorem $q+1$ depreſſa dabit

$$\frac{aa}{cc} = \frac{n^6(q+1)^2 - 3n^4(q+1) + 3nn - 1}{qq - q + 1 - nn}, \text{ ſive}$$

$$aa = n^6qq + n^4(2nn-3)q + (nn-1)^3$$

tum vero

$$cc = qq - q + 1 - nn, \text{ ſive } n^6cc = n^6qq - n^6q - n^6(nn-1).$$

Pro problemate igitur capi oportebit $x = n^3q$ et $y = 1$; reliqua ſunt manifeſta.

SOLU-