

Nombres à trois chiffres

Question

Montrer que parmi dix-huit nombres à trois chiffres consécutifs, il en existe un qui est divisible par la somme de ses chiffres.

Réponse

Dans le cadre de cette réponse, convenons d'appeler **sympathiques** les nombres qui sont divisibles par la somme de leurs chiffres.

La question fait évidemment penser aux critères de divisibilité par 3 et par 9 :

Théorème.

- Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Pour les nombres à trois chiffres, la somme des chiffres est comprise entre 1 et $9+9+9 = 27$. Ainsi, si notre nombre est en outre divisible par 9, la somme de ses chiffres ne peut être que 9, 18 ou 27. Intéressons-nous à ces trois catégories de multiples de 9 :

- Les multiples de 9 dont la somme des chiffres vaut 9 : par le critère de divisibilité, ceux-là sont tous sympathiques.
- Les multiples de 9 dont la somme des chiffres vaut 27 : cette catégorie est en fait restreinte au seul nombre 999. On peut remarquer qu'il est sympathique : $999 = 37 \times 27$, mais cela ne va en fait pas nous importer.
- Les multiples de 9 dont la somme des chiffres vaut 18 : ceux-là peuvent être sympathiques (comme 990) ou pas (comme 909). En fait, il est assez facile de les distinguer : d'après le lemme de Gauß, comme 2 et 9 sont premiers entre eux, un nombre est divisible par 18 si et seulement s'il est pair et divisible par 9. Ainsi, dans notre catégorie, les pairs sont sympathiques et les impairs ne le sont pas.

On a donc trouvé une grande famille de nombres sympathiques : que la somme de leurs chiffres vaille 9 ou 18, tous les multiples de 18 sont sympathiques. Comme il existe toujours un multiple de n dans une liste de n nombres consécutifs, on a donc bien montré que **parmi 18 nombres à trois chiffres consécutifs, il existait toujours un nombre sympathique**.

Une vérification exhaustive montre d'ailleurs qu'on ne peut pas remplacer 18 par un nombre plus petit : parmi les 17 nombres compris entre 559 et 575, par exemple, ne se trouve aucun nombre sympathique.